

Mathematik-Abitur in Nordrhein-Westfalen

# Zusammenfassung für das allgemeinbildende Gymnasium - Leistungskurs

Jakob Schmid

Wirtschaftsmathematiker

Youtube-Channel: Fit im Mathe-Abi

Jakob Schmid Consulting

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analysis</b>	<b>5</b>
1.1	Ableitung	5
1.1.1	Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von $x$	5
1.1.2	Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel	5
1.1.3	Ableitung der $e$ -Funktion	6
1.1.4	Spezialfälle	6
1.1.5	Produktregel	6
1.1.6	Kettenregel	7
1.2	Integration (Aufleitung)	7
1.2.1	Aufleitung einer Zahl/Konstanten	8
1.2.2	Aufleitung von Potenzfunktionen ( $x, \frac{1}{x^2}, \sqrt{x}, x^2$ , usw.) und trigonometrischen Funktionen ( $\sin(x), \cos(x)$ )	8
1.2.3	Aufleitung der $e$ -Funktion und von verketteten Funktionen	8
1.2.4	Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft	9
1.3	Integral	10
1.3.1	Integral berechnen	12
1.3.2	Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen	12
1.3.3	Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen	13
1.3.4	Integral aus einem Schaubild berechnen	14
1.4	Mittelwert einer Funktion	15
1.5	Quadratische Gleichung lösen	16
1.5.1	pq-Formel	16
1.5.2	Mitternachtsformel (abc-Formel)	17
1.6	Lösen von Gleichungen durch Substitution	17
1.7	Satz vom Nullprodukt	19
1.8	Nullstellen	20
1.9	Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt)	20
1.10	Wendestellen, -punkte	23
1.10.1	Wendepunkt	24
1.11	NEW-Regel	24
1.12	Zusammenhänge der Graphen von $F, f, f'$ und $f''$	25
1.12.1	Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen $f, f'$ und $f''$	26
1.13	Monotonieverhalten einer Funktion	27
1.14	Krümmungsverhalten einer Funktion	28
1.15	Tangente	29
1.16	Ganzrationale Funktionen	30
1.16.1	Steckbriefaufgabe, Funktionsgleichung bestimmen	30
1.17	Symmetrie	32
1.18	Definitionsbereich	33
1.19	Grenzwert/Limes einer Funktion	34
1.20	Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus)	37
1.20.1	Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften	38

1.21	Funktionenschar . . . . .	39
1.21.1	Ortskurve/-linie . . . . .	40
1.22	Rotationskörper - Volumen berechnen . . . . .	41
1.23	Funktion zeichnen oder skizzieren . . . . .	42
1.24	ln-Regeln . . . . .	43
1.25	Potenzregeln . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Geometrie</b>	<b>45</b>
2.1	LGS - Lineares Gleichungssystem . . . . .	45
2.1.1	Additionsverfahren . . . . .	45
2.1.2	Gauß-Verfahren . . . . .	47
2.2	3D-Koordinatensystem . . . . .	49
2.3	Vektoren . . . . .	50
2.3.1	Rechnen mit Vektoren . . . . .	51
2.3.2	Lineare Abhängigkeit . . . . .	52
2.3.3	Länge eines Vektors . . . . .	52
2.3.4	Skalarprodukt . . . . .	53
2.3.5	Kreuzprodukt . . . . .	53
2.4	Gerade . . . . .	54
2.4.1	Geometrische Punktprobe bei Geraden . . . . .	55
2.4.2	Lage von 2 Geraden . . . . .	56
2.5	Mittelpunkt einer Strecke . . . . .	59
2.6	Ebene . . . . .	60
2.6.1	Parameterform . . . . .	60
2.6.2	Koordinatenform . . . . .	61
2.6.3	Normalenform . . . . .	62
2.6.4	Ebene in Koordinatensystem einzeichnen . . . . .	63
2.6.5	Lage von 2 Ebenen . . . . .	64
2.7	Lage von Gerade und Ebene . . . . .	66
2.8	Abstand . . . . .	69
2.8.1	Punkt Punkt . . . . .	69
2.8.2	Punkt Gerade . . . . .	69
2.8.3	Punkt Ebene . . . . .	71
2.8.4	Hessesche Normalenform (HNF) . . . . .	72
2.8.5	Gerade Ebene . . . . .	72
2.8.6	Ebene Ebene . . . . .	72
2.8.7	Gerade Gerade . . . . .	73
2.8.8	Abstand windschiefer Geraden . . . . .	74
2.9	Spiegelungen . . . . .	75
2.10	Schatten durch punktförmige Lichtquelle oder Strahlen . . . . .	78
2.11	Winkel . . . . .	81

<b>3</b>	<b>Stochastik</b>	<b>83</b>
3.1	Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	83
3.2	Baumdiagramm . . . . .	86
3.3	Gegenwahrscheinlichkeit . . . . .	88
3.4	Erwartungswert . . . . .	89
3.5	Fakultät $n!$ . . . . .	91
3.6	Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient . . . . .	91
3.6.1	Kumulierte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	93
3.6.2	Stochastisches Tafelwerk, Tabelle-Binomialverteilung . . . . .	95
3.6.3	Erwartungswert . . . . .	97
3.6.4	Standardabweichung . . . . .	98
3.7	Lagemaße und Streumaße von Stichproben . . . . .	99
3.8	Normalverteilung/Gaußverteilung . . . . .	101
3.8.1	Verteilungsfunktion - Integralfunktion . . . . .	102
3.8.2	Stochastisches Tafelwerk, Tabelle-Standardnormalverteilung ( $\phi$ ) . . . . .	103
3.8.3	Sigma-Regeln - Normalverteilung . . . . .	107
3.8.4	Laplace Bedingung . . . . .	108
3.9	Schätzen von Parametern ( $\mu, p$ ) der Binomial- und Normalverteilung . . . . .	110
3.9.1	Konfidenzintervall und Konfidenzniveau . . . . .	110
3.9.2	Erwartungswert $\mu$ schätzen . . . . .	111
3.9.3	Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil $p$ schätzen . . . . .	114
3.10	Einseitiger Hypothesentest . . . . .	117
3.10.1	Fehler 1. Art . . . . .	119
3.10.2	Signifikanzniveau . . . . .	123
3.10.3	Fehler 2. Art . . . . .	127
3.10.4	Normalverteilung - Einseitiger Signifikanztest mit Sigma-Regeln . . . . .	130
3.11	Zwei-/Beidseitiger Hypothesentest . . . . .	133
3.11.1	Fehler 1. Art . . . . .	135
3.11.2	Signifikanzniveau . . . . .	136
3.11.3	Normalverteilung: Zweiseitiger Signifikanztest mit Sigma-Regeln . . . . .	139
3.11.4	Fehler 2. Art . . . . .	143
3.12	Alternativtest . . . . .	144
3.12.1	Fehler 1. und 2. Art . . . . .	145
3.13	Stochastische Prozesse . . . . .	149
3.13.1	Übergangendiagramm/-graph . . . . .	149
3.13.2	Matrixmultiplikation, Matrix-Vektor-Produkt, Potenzieren von Matrizen . . . . .	150
3.13.3	Stochastische Übergangsmatrix, Zustandsvektor und Folgeverteilung, Vorherige Verteilung/Rückwärts-Rechnen . . . . .	153

# 1 Analysis

## 1.1 Ableitung

### 1.1.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von $x$

Die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  ist Null.

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

**Beispiel.**  $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$   
 $f(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$

Die Ableitung von  $x$  ist Eins.

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

**Beispiel.**  $f(x) = x + 6 \Rightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$   
 $f(x) = -x - 3 \Rightarrow f'(x) = -1 - 0 = -1$

### 1.1.2 Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel

**Potenzregel:** Beim Ableiten der Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  mit beliebigem Exponenten (Hochzahl)  $n$  von  $x$  schreibe den Exponenten (die Hochzahl) mit einem Mal-Zeichen vor das  $x$ . Ziehe anschließend „1“ von dem Exponenten (der Hochzahl) ab.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

**Beispiel.**  $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$   
 $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}$

**Faktorregel:**  $u(x)$  sei eine beliebige Funktion (z.B.  $u(x) = x$ ,  $u(x) = x^3$ ,  $u(x) = \sin(x)$  oder  $u(x) = e^x$  usw.). Steht vor  $u(x)$  ein konstanter Faktor (irgendeine Zahl)  $c$ , so bleibt dieses  $c$  beim Ableiten unverändert erhalten, während  $u(x)$  normal abgeleitet wird.

$$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

**Beispiel.**  $f(x) = -2 \cdot x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot (-3 \cdot x^{-3-1}) = 6x^{-4}$   
 $f(x) = 5 \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$

**Summen- und Differenzregel:**  $u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen. Steht ein + oder ein - zwischen  $u(x)$  und  $v(x)$ , so werden beim Ableiten die Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  jeweils für sich abgeleitet und die Ableitungen anschließend wieder addiert, bzw. subtrahiert.

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x) \text{ und } f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

**Beispiel.**  $f(x) = 2x + 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 + 8x$   
 $f(x) = x - 7 \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - 7 \cdot (-\sin(x)) = 1 + 7 \sin(x)$

### 1.1.3 Ableitung der $e$ -Funktion

$u(x)$  sei eine beliebige Funktion. Die Ableitung der  $e$ -Funktion:  $f(x) = e^{u(x)}$  funktioniert so, dass zunächst der ganze Term  $e^{u(x)}$  so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend mit der Ableitung von  $u(x)$  multipliziert wird.

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x \\ f(x) = e^{-3x} &\Rightarrow f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x} \\ f(x) = 4e^{x^2+1} &\Rightarrow f'(x) = 4e^{x^2+1} \cdot (2x + 0) = 8xe^{x^2+1} \end{aligned}$$

### 1.1.4 Spezialfälle

Ist die abzuleitende Funktion ein Bruch, stellt man sie mit folgender Regel erstmal um:  $f(x) = \frac{1}{x^n} = 1 \cdot x^{-n}$ . Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} &\Rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} &\Rightarrow f'(x) = -3 \cdot 2x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

Ist die abzuleitende Funktion eine Wurzelfunktion, stellt man diese erstmal nach folgender Regel um:  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ . Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f(x) = 3\sqrt[3]{x} = 3x^{\frac{1}{3}} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (**sin(x)**, **cos(x)**) sind:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung der **ln-Funktion** (Logarithmus zur Basis  $e$ ):  $f(x) = \ln(x)$  ist:

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

### 1.1.5 Produktregel

**Produktregel:**  $u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen. Steht ein Mal-Zeichen zwischen  $u(x)$  und  $v(x)$ , so wird beim Ableiten zunächst  $u(x)$  abgeleitet und mit  $v(x)$  multipliziert und dazu addiert wird  $u(x)$  multipliziert mit der Ableitung von  $v(x)$ .

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = 3x \cdot \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot (-\sin(x)) \\ f(x) = x^4 \cdot e^{2x} &\Rightarrow f'(x) = 4x^3 \cdot e^{2x} + x^4 \cdot 2e^{2x} = x^3e^{2x}(4 + 2x) \end{aligned}$$

### 1.1.6 Kettenregel

**Kettenregel:** Sind zwei beliebige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  miteinander verkettet:  $u(v(x))$  (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Ableiten zunächst die „äußere“ Funktion  $u(\cdot)$  abgeleitet und anschließend mit der Ableitung der „inneren“ Funktion  $v(x)$  multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

**Beispiel.** 1. Art der äußeren Funktion  $u(\cdot)$  als  $(v(x))^n$  mit Hochzahl/Exponent  $n$ :

$$f(x) = (4x^2 + 3)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot (4x^2 + 3)^{3-1} \cdot (2 \cdot 4x^{2-1} + 0) = 3(4x^2 + 3)^2 \cdot 8x = 24(4x^2 + 3)^2 x$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot 5(x-9)^{-2-1} \cdot (1-0) = -10(x-9)^{-3}$$

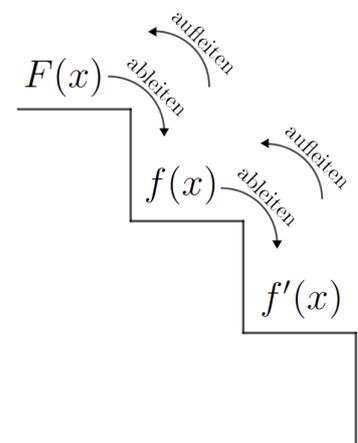
**Beispiel.** 2. Art der äußeren Funktion  $u(\cdot)$  als  $\sin(v(x))$  oder  $\cos(v(x))$ :

$$f(x) = \sin(x^3 + 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x^3 + 1) \cdot (3x^{3-1} + 0) = 3 \cos(x^3 + 1)x^2$$

$$f(x) = 2 \cos(x^4) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2(-\sin(x^4)) \cdot 4x^{4-1} = 8(-\sin(x^4))x^3$$

## 1.2 Integration (Aufleitung)

Das Ab- und Aufleiten von Funktionen kann man mit Treppensteigen vergleichen. Die Funktion  $f(x)$ , die es ab- bzw. aufzuleiten gilt, ist die Treppenstufe auf der wir „momentan“ stehen. Leiten wir diese Funktion  $f(x)$  nun einmal ab, erhalten wir die Ableitung  $f'(x)$ . Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe hinabgestiegen. Wollen wir nun wieder eine Stufe zurück nach oben auf die „Treppenstufe“ von  $f(x)$  steigen, müssen wir  $f'(x)$  aufleiten. Leiten wir also  $f'(x)$  einmal auf, erhalten wir wieder die Funktion  $f(x)$  und befinden uns wieder auf der ursprünglichen Treppenstufe von  $f(x)$ . Leiten wir die Funktion  $f(x)$  ein weiteres Mal auf, erhalten wir die Aufleitung  $F(x)$ . Man nennt  $F(x)$  die Stammfunktion von  $f(x)$ . Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe nach oben gestiegen. Leiten wir nun die Stammfunktion  $F(x)$  einmal ab, erhalten wir wieder die Funktion  $f(x)$  und bewegen uns auf unserer Treppe wieder eine Stufe nach unten.



**Merke:** Wenn ihr eine Funktion  $f(x)$  aufleitet, könnt ihr jedes Mal danach

**kontrollieren**, ob eure Ableitung  $F(x)$  korrekt ist, indem ihr diese Ableitung  $F(x)$  wieder ableitet. Denn es muss dabei wieder die ursprüngliche Funktion  $f(x)$  herauskommen (Denkt an die Treppe!), ansonsten ist eure Ableitung **nicht korrekt!**

### 1.2.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten

Die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  ist die Zahl/Konstante  $C$  multipliziert mit  $x$ .

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad F(x) = C \cdot x$$

**Beispiel.**  $f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 \cdot x = x$       **Kontrolle:**  $F'(x) = 1 \checkmark$   
 $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 5x$                       **Kontrolle:**  $F'(x) = 5 \checkmark$

### 1.2.2 Ableitung von Potenzfunktionen ( $x$ , $\frac{1}{x^2}$ , $\sqrt{x}$ , $x^2$ , usw.) und trigonometrischen Funktionen ( $\sin(x)$ , $\cos(x)$ )

Beim Ableiten von Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  mit beliebigem Exponenten (Hochzahl)  $n$  von  $x$  addiere als Erstes den Exponenten (die Hochzahl)  $n$  mit „+1“. Als Zweites wird der Term  $x^{n+1}$  multipliziert mit: 1 geteilt durch  $n + 1$  (als Bruch geschrieben).

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

**Beispiel.**  $f(x) = x = x^1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2$   
 $f(x) = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{4}{2+1} \cdot x^{2+1} = \frac{4}{3}x^3$   
 $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{6}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = \frac{6}{-2}x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$   
 $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{3}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x^3}$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (**sin(x)**, **cos(x)**) sind:

$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x)$       **Kontrolle:**  $F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x) \checkmark$   
 $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(x)$               **Kontrolle:**  $F'(x) = \cos(x) \checkmark$

### 1.2.3 Ableitung der e-Funktion und von verketteten Funktionen

$u(x)$  sei eine beliebige lineare Funktion. Die Ableitung der e-Funktion:  $f(x) = e^{u(x)}$  funktioniert so, dass zunächst der ganze Term  $e^{u(x)}$  so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend multipliziert wird mit: 1 geteilt durch die Ableitung von  $u(x)$ .

$$f(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^{u(x)} \cdot \frac{1}{u'(x)}$$

**Beispiel.**  $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x \cdot \frac{1}{1} = e^x$

$$f(x) = e^{-3x} \Rightarrow F(x) = e^{-3x} \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Sind zwei beliebige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  miteinander verkettet:  $u(v(x))$  (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Aufleiten zunächst die „äußere“ Funktion  $u(\ )$  aufgeleitet (zu  $U(x)$ ) und anschließend mit: 1 geteilt durch die Ableitung der „inneren“ Funktion  $v(x)$  multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow F(x) = U(v(x)) \cdot \frac{1}{v'(x)}$$

**Beispiel.** 1. Art der äußeren Funktion  $u(\ )$  als  $(v(x))^n$  mit Hochzahl/Exponent  $n$ :

$$f(x) = (2x + 1)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3+1} \cdot (2x + 1)^{3+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x + 1)^4 = \frac{1}{8}(2x + 1)^4$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{-2+1} \cdot (x-9)^{-2+1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{-1} \cdot (x-9)^{-1} = \frac{-5}{(x-9)}$$

**Beispiel.** 2. Art der äußeren Funktion  $u(\ )$  als  $\sin(v(x))$  oder  $\cos(v(x))$ :

$$f(x) = \sin(3x + 1) \Rightarrow F(x) = -\cos(3x + 1) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cos(3x + 1)$$

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow F(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 2 = 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

#### 1.2.4 Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft

Leitet man eine Funktion  $f(x)$  auf, so erhält man die sogenannte **Stammfunktion**  $F(x)$  von  $f(x)$ . Das Besondere ist, dass jede Funktion  $f(x)$  unendlich viele Stammfunktionen besitzt, aber nur eine Ableitung hat.

Denken wir noch einmal an unsere Treppe: Beim Aufleiten einer Funktion  $f(x)$  haben wir immer die Möglichkeit zu kontrollieren, ob unsere Aufleitung  $F(x)$  korrekt ist, indem wir  $F(x)$  ableiten und dann schauen, ob dasselbe wie  $f(x)$  rauskommt. Da die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  Null ist, können wir an die Aufleitung  $F(x)$  ein beliebiges  $C$  dazuaddieren und erhalten beim Ableiten wieder  $f(x)$ , egal welche Zahl wir für  $C$  einsetzen.

$$F(x) + C \Rightarrow \text{Ableiten ergibt: } F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x) \checkmark$$

**Beispiel.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^2$  mit der „allgemeinen“ Aufleitung  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  und setzen für  $C$  verschiedene Zahlen ein und leiten ab, um zu schauen ob wir wieder  $f(x) = x^2$  erhalten:

$$C = 7 : F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7 \Rightarrow F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

$$C = -3: F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \Rightarrow F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

Ist nun die Aufgabenstellung, dass eine Funktion  $f(x)$  gegeben ist und man diejenige Stammfunktion  $F(x)$  bestimmen soll, die durch einen **bestimmten** Punkt (z.B.  $F(3) = 8 \Rightarrow P(3|8)$ ) verläuft. Dann geht es genau darum dieses  $C$  so zu bestimmen, dass  $F(x)$  durch diesen Punkt verläuft.

**Beispiel.** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$ . Bestimme diejenige Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$  mit  $F(1) = 4$ :

$$1. \text{ Bestimme allgemeine Aufleitung: zunächst vereinfache } f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3} = 8(2x-1)^{-3} \\ \Rightarrow F(x) = 8 \cdot \frac{1}{-3+1} \cdot (2x-1)^{-3+1} \cdot \frac{1}{2} + C = 8 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{2} (2x-1)^{-2} + C = \frac{-2}{(2x-1)^2} + C$$

2. Bestimme  $C$  so, dass  $F(1) = 4$  ist:

$$F(1) = \frac{-2}{(2 \cdot 1 - 1)^2} + C = \frac{-2}{(1)^2} + C = -2 + C \Rightarrow F(1) = 4 \Rightarrow -2 + C = 4 \Rightarrow C = 6$$

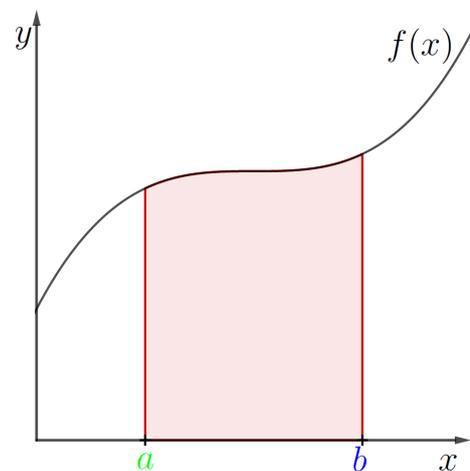
3. Schreibe die Stammfunktion  $F(x)$  mit  $C = 6$  hin:

$$\text{Die gesuchte Stammfunktion lautet: } F(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} + 6.$$

### 1.3 Integral

Das **Integral** einer Funktion  $f(x)$  beschreibt „häufig“ den Flächeninhalt der **Fläche** zwischen der Funktion  $f(x)$  und der  $x$ -Achse, mit  $a$  als sogenannte „untere“ Grenze und  $b$  als „obere“ Grenze **auf der  $x$ -Achse**. Die Schreibweise für das **Integral** einer Funktion  $f(x)$  mit der unteren Grenze  $a$  und der oberen Grenze  $b$  ist wie folgt:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Verläuft die **Fläche**, die das **Integral** beschreibt, unterhalb der  $x$ -Achse, so nimmt das **Integral** einen **negativen** Wert an. Verläuft sie oberhalb der  $x$ -Achse, nimmt das **Integral** einen **positiven** Wert an.

Sind die untere Grenze  $a$  und die obere Grenze  $b$  nun so gesetzt, dass bei unserem **Integral** ein Teil der **Fläche** unterhalb und ein Teil oberhalb der  $x$ -Achse verläuft, so

wird die „negative“ Fläche von der „positiven“ Fläche abgezogen und das Ergebnis ist das gesamte **Integral** von  $a$  bis  $b$ .

### 1.3.1 Integral berechnen

Das Integral einer Funktion  $f(x)$  wird folgendermaßen berechnet. Zunächst leitet man die Funktion  $f(x)$  auf und erhält  $F(x)$ . In dieses  $F(x)$  setzt man einmal die obere Grenze  $b$  für  $x$  ein **Minus** die untere Grenze  $a$  eingesetzt in  $F(x)$ . Rechnerische Schreibweise ist:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

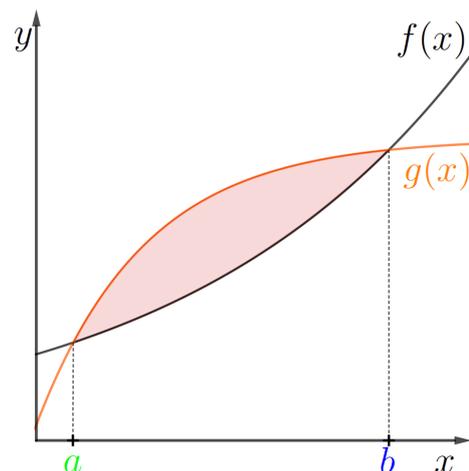
**Beispiel.** Bestimme das Integral  $\int_{-2}^4 x^2 - 2 dx$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 x^2 - 2 dx &= \left[ \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 2x \right]_{-2}^4 = \left[ \frac{1}{3} x^3 - 2x \right]_{-2}^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - \left( \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 64 - 8 - \left( \frac{1}{3} \cdot (-8) - (-4) \right) = \frac{64}{3} - 8 - \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 4 = \frac{72}{3} - 12 = 24 - 12 = 12 \end{aligned}$$

### 1.3.2 Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen

Eine Aufgabenstellung ist, die **Fläche**, welche von den beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird, zu berechnen. Die Integralrechnung liefert uns die Lösung. Wenn wir nämlich das Integral von  $g(x)$  mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze **Minus** das Integral von  $f(x)$  auch mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze rechnen, erhalten wir exakt die gesuchte **Fläche**:

$$\text{Fläche} = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) - f(x) dx$$



Um die Integrale berechnen zu können, müssen zuerst die untere und obere Grenze ( $a$  und  $b$ ) berechnet werden. Diese erhält man, durch die Berechnung der **Schnittpunkte** von  $f(x)$  und  $g(x)$ , indem man  $f(x)$  mit  $g(x)$  gleichsetzt und nach  $x$  auflöst.

**Beispiel.** : Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen  $f(x) = 6x$  und  $g(x) = 3x^2$  eingeschlossen wird.

1. Berechne die Schnittpunkte zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$ : setze  $f(x) = g(x)$

$$6x = 3x^2 \quad | : x \quad \Rightarrow \text{erster Schnittpunkt bei } x_1 = 0$$

$$6 = 3x \quad | : 3$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \text{zweiter Schnittpunkt bei } x_2 = 2$$

2. Berechne die Fläche mit Hilfe der beiden Integrale von  $f(x)$  und  $g(x)$  mit 0 als untere und 2 als obere Grenze:

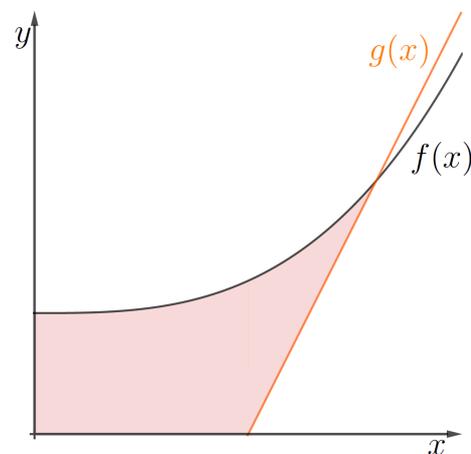
$$\int_0^2 6x \, dx - \int_0^2 3x^2 \, dx = \int_0^2 6x - 3x^2 \, dx = \left[ 6 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} - 3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} \right]_0^2 = \left[ \frac{6}{2} x^2 - \frac{3}{3} x^3 \right]_0^2$$

$$= \left[ 3x^2 - x^3 \right]_0^2 = 3 \cdot 2^2 - 2^3 - (3 \cdot 0^2 - 0^3) = 3 \cdot 4 - 8 - (0 - 0) = 12 - 8 = 4$$

**Hinweis:** Man hätte auch  $f(x)$  mit  $g(x)$  vertauschen können (Also das Integral von  $g(x)$  Minus das Integral von  $f(x)$  rechnen können), dann wäre nicht 4 sondern  $-4$  bei der Rechnung oben herausgekommen. Da eine Fläche allerdings nicht negativ sein kann nutzt man die Betragsstriche  $||$  um die Lösung dann „positiv“ zu machen, also:  $|-4| = 4$ .

### 1.3.3 Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen

Eine Aufgabenstellung ist, die **Fläche**, welche von mehreren Graphen eingeschlossen wird, zu berechnen. Im Beispiel rechts ist es die **Fläche**, die von der  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse und den beiden Funktionen  $f(x)$  sowie  $g(x)$  eingeschlossen wird.

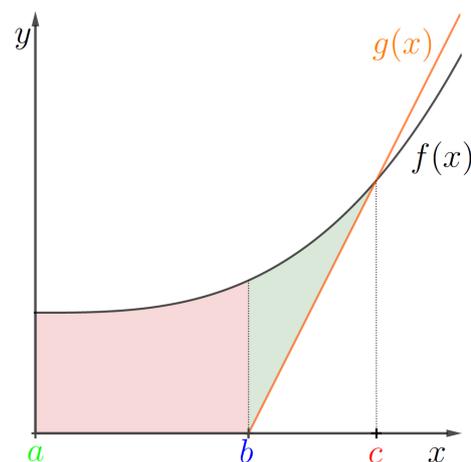


Um diese Fläche zu berechnen, muss man sie in zwei Teile zerlegen, nämlich in die rote Fläche und die grüne Fläche (siehe untere Abbildung). Diese beiden Flächen lassen sich wiederum mit der Integralrechnung berechnen, denn die rote Fläche ist das Integral von  $f(x)$  mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze. Die grüne Fläche wiederum ist die Fläche, die im Bereich von  $b$  bis  $c$  durch die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird:

Gesuchte eingeschlossene Fläche = **Fläche** + **Fläche**

$$= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) - g(x) \, dx$$

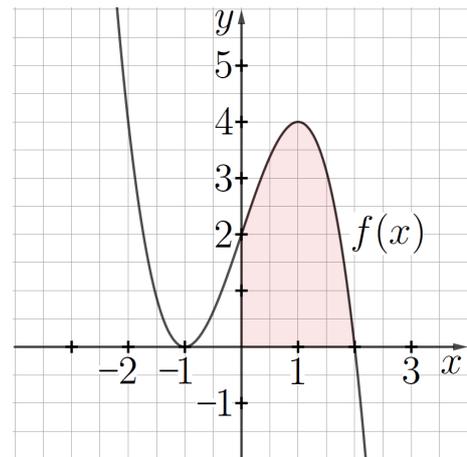
Um diese Integrale berechnen zu können, müssen noch die jeweiligen Integralgrenzen  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmt werden.  $a = 0$  da die  $y$ -Achse die „linke“ Seite der Fläche begrenzt,  $b$  berechnet sich durch den Schnittpunkt von  $g(x)$  mit der  $x$ -Achse und  $c$  wird mit dem Schnittpunkt von  $f(x)$  mit  $g(x)$  berechnet.



**Fazit:** Unterteile die gesuchte Fläche geschickt, sodass man mit geeigneten Integralgrenzen die gesuchte Fläche berechnen kann.

### 1.3.4 Integral aus einem Schaubild berechnen

Ist die Aufgabe das **Integral** einer Funktion aus einem Schaubild abzulesen, so bestimmt man den Inhalt der **Fläche**, die das **Integral** beschreibt, durch händisches Kästchenzählen. Hat man die Anzahl der Kästchen erfasst, die auf der gesuchten **Fläche** vorhanden sind, so muss man die Skalierung der Achsen betrachten und damit den Flächeninhalt eines Kästchens bestimmen (Länge MAL Breite). Anschließend multipliziert man die Anzahl der Kästchen mit dem Flächeninhalt eines Kästchens und hat damit das gesuchte **Integral** bestimmt.



**Beispiel.** : Bestimme aus dem oberen Schaubild das **Integral**  $I = \int_0^2 f(x) dx$

Es handelt sich bei dem **Integral** um die rot markierte **Fläche**. Kästchenzählen ergibt, dass die **Fläche** ca. 24 Kästchen beinhaltet. Auf der  $x$ -Achse hat ein Kästchen die Einheit/Länge 0,5 und auf der  $y$ -Achse dieselbe. Somit beträgt der Flächeninhalt von einem Kästchen: Länge MAL Breite =  $0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = \frac{1}{4}$ . Somit ist die gesamte **Fläche**, also das **Integral**:

$$I = \int_0^2 f(x) dx = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

Eine weitere mögliche Aufgabenstellung mit diesem oberen Schaubild ist, folgenden Term, bestehend aus der Stammfunktion  $F(x)$  von der im Schaubild gegebenen Funktion  $f(x)$ , zu bestimmen:

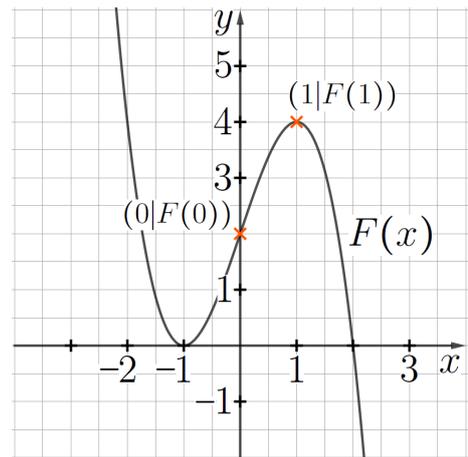
$$F(2) - F(0)?$$

Die Lösung führt über die Überlegung, dass dieser Term ja das Integral von  $f(x)$  mit 0 als untere und 2 als obere Grenze ist. Und die Lösung für dieses Integral bestimmen wir nach demselben „Kästchenzähl-Schema“ wie in der oberen Aufgabenstellung:

$$\int_0^2 f(x) dx = \left[ F(x) \right]_0^2 = F(2) - F(0) = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

**Hinweis:** Wichtig ist also darauf zu achten, nach welcher Funktion in der Aufgabenstellung gefragt ist (z.B. Stammfunktion  $F(x)$ , „normale“ Funktion  $f(x)$  oder Ableitung  $f'(x)$ ) und welche Funktion im Schaubild tatsächlich gegeben ist.

Ist im Schaubild die Stammfunktion  $F(x)$  der Funktion  $f(x)$  gegeben und das Integral  $I = \int_0^1 f(x) dx$  der Funktion  $f(x)$  ist gesucht, so liest man aus dem Schaubild von  $F(x)$  bei der unteren und oberen Grenze des Integrals (in dem Fall  $x = 0$  und  $x = 1$ ) die **y-Werte** ab (also  $F(0) = 2$  und  $F(1) = 4$ ) und berechnet das gesuchte Integral:



$$I = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 4 - 2 = 2$$

### 1.4 Mittelwert einer Funktion

Den Mittelwert  $M$ , den eine Funktion  $f(x)$  in einem bestimmten Bereich/Intervall  $I = [a, b]$  annimmt, berechnet man mit folgender Formel:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

**Beispiel.** : Die Funktion  $f(t) = 36 + e^{0,1t}$  beschreibt den typischen Körpertemperaturverlauf einer Fieberkurve in den ersten 10 Stunden eines erkrankten Erwachsenen in  $^{\circ}C$ . Dabei ist  $t \geq 0$  die Zeit in Stunden nach der Erkrankung. Wie hoch ist die **mittlere** Körpertemperatur in den ersten 10 Stunden?

Gesucht ist der Mittelwert von  $f(t)$  im Zeitraum der ersten 10 Stunden, somit im Intervall  $I = [0, 10]$ :

$$M_f = \frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} 36 + e^{0,1t} dt = \frac{1}{10} \cdot [36t + 10e^{0,1t}]_0^{10} = \frac{1}{10} \cdot (36 \cdot 10 + 10e^{0,1 \cdot 10} - (36 \cdot 0 + 10e^{0,1 \cdot 0}))$$

$\approx 37,72^{\circ}C$  beträgt die mittlere Temperatur in den ersten 10 Stunden

Eine weitere Frage mit derselben Aufgabenstellung könnte sein: Wie hoch ist die **mittlere Änderungsrate** der Körpertemperatur in den ersten 8 Stunden?

Das Keyword „**Änderungsrate**“ ist IMMER ein Synonym für die **Ableitung** (in dem Fall  $f'(t)$ ). Somit ist der Mittelwert von  $f'(t)$  im Zeitraum der ersten 8 Stunden, somit im Intervall  $I = [0, 8]$ , gesucht:

$$M_{f'} = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 f'(t) dt = \frac{1}{8} \cdot \int_0^8 0,1e^{0,1t} dt = \frac{1}{8} \cdot [e^{0,1t}]_0^8 = \frac{1}{8} \cdot (e^{0,1 \cdot 8} - e^{0,1 \cdot 0})$$

$\approx 0,15^{\circ}C$  pro Stunde ist die mittlere Änderungsrate in den ersten 8 Stunden

## 1.5 Quadratische Gleichung lösen

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die als höchsten Exponenten (Hochzahl) die 2 besitzt. Deshalb heißt sie „quadratisch“. Es gibt zwei Möglichkeiten für eine quadratische Gleichung. 1. Möglichkeit ist, dass  $x$  nur die 2 als Exponenten (Hochzahl) besitzt.  $a$  und  $b$  seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 = b$$

**Beispiel.**  $3x^2 = 12 \quad | : 3$   
 $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$   
 $x = \pm 2 \quad \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

2. Möglichkeit ist, dass in der quadratischen Gleichung  $x$  mit dem Exponenten (Hochzahl) 2 (also  $x^2$ ) vertreten ist und ein einfaches  $x$  (mit dem Exponenten (Hochzahl) 1).  $a$ ,  $b$  und  $c$  seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es folgen nun zwei Verfahren, mit denen man diese Gleichung nach  $x$  auflösen kann. Die pq-Formel und die Mitternachtsformel (abc-Formel).

### 1.5.1 pq-Formel

Um die pq-Formel anwenden zu können, muss man zunächst die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  durch  $a$  teilen um die „pq-Form“ zu erhalten:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 & \quad | : a \\ \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} & \quad \Rightarrow \frac{b}{a} = p \text{ und } \frac{c}{a} = q \\ x^2 + px + q = 0 & \end{aligned}$$

Haben wir die Gleichung nun in die „pq-Form“ gebracht und somit  $p$  und  $q$  herausgefunden, müssen wir nun noch  $p$  und  $q$  in die pq-Formel einsetzen und die Lösung(en) von  $x$  berechnen:

$$\text{Lösung: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir erhalten also maximal 2 Lösungen für  $x$ . Die Lösung  $x_1$  erhalten wir, indem wir nach dem Bruch  $-\frac{p}{2} + \dots$  rechnen und die Lösung  $x_2$  erhalten wir, indem wir nach dem Bruch  $-\frac{p}{2} - \dots$  rechnen. Nur eine Lösung für  $x$  existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{0}$ . Dann ist die einzige Lösung der Term  $-\frac{p}{2}$ . Gar keine Lösung für  $x$  erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

**Beispiel.**  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad | : 2$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{2}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{3}{2} = p \text{ und } -1 = q$$

**Lösung:**  $x_{1,2} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - (-1)} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}}$   
 $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \mathbf{x_1} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbf{x_2} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$

### 1.5.2 Mitternachtsformel (abc-Formel)

Um die Mitternachtsformel anwenden zu können, braucht man die quadratische Gleichung in der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nun müssen wir noch  $a$ ,  $b$  und  $c$  in die Mitternachtsformel (abc-Formel) einsetzen und die Lösung(en) von  $x$  berechnen:

$$\mathbf{Lösung:} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In der Regel erhalten wir also 2 Lösungen für  $x$ . Die Lösung  $x_1$  erhalten wir, indem wir im Zähler nach  $-b + \dots$  rechnen und die Lösung  $x_2$  erhalten wir, indem wir im Zähler nach  $-b - \dots$  rechnen. Nur eine Lösung für  $x$  existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt  $\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ . Dann ist die einzige Lösung der Term  $\frac{-b}{2a}$ . Gar keine Lösung für  $x$  erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

**Beispiel.**  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = -2 \quad | \cdot x^2$

$$\frac{3x^2}{x} - \frac{2x^2}{x^2} = -2x^2 \quad | +2x^2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

**Lösung:**  $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$$\Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbf{x_2} = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

### 1.6 Lösen von Gleichungen durch Substitution

$a$ ,  $b$  und  $c$  seien beliebige Zahlen. Substituieren bedeutet soviel wie etwas ersetzen, austauschen. Bei bestimmten Gleichungen (z.B.  $ae^{2x} + be^x + c = 0$ ) geht es genau darum, einen Term (hier:  $e^x$ ) zunächst durch einen anderen Term (z.B.  $u$ ) zu ersetzen/substituieren,

womit die Gleichung für uns lösbar wird (man schreibt: Substitution:  $e^x = u$ ). In der Regel geht es immer darum, die Gleichung durch die Substitution in eine quadratische Form zu bringen ( $au^2 + bu + c = 0$ ), damit die pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel) angewendet werden kann. Nachdem die quadratische Gleichung nach dem neuen Term ( $u$ ) gelöst ist, werden nun die Lösungen für  $u$  in die Substitutionsgleichung  $e^x = u$  eingesetzt und nach  $x$  aufgelöst (Man nennt dies Resubstitution/Rücksubstitution).

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $-e^{2x} + 5e^x - 4 = 0$ .

1. Substitution:  $e^x = u$

2.  $u$  für  $e^x$  in die Gleichung einsetzen:  $-u^2 + 5u - 4 = 0$

3. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

**Lösung:**  $u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$  und  $u_2 = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

4. Resubstitution:  $e^x = u_1$  und  $e^x = u_2$ , also  $e^x = 1$  und  $e^x = 4$

$e^x = 1 \quad | \ln()$   $e^x = 4 \quad | \ln()$

$\ln(e^x) = \ln(1)$   $\ln(e^x) = \ln(4)$

$x_1 = 0$   $x_2 = \ln(4)$

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $\frac{2}{x^2} + x^2 = 3$ .

1.  $x$  aus dem Bruch bekommen und anschließend die Gleichung geeignet umstellen:

$\frac{2}{x^2} + x^2 = 3 \quad | \cdot x^2$

$\frac{2 \cdot x^2}{x^2} + x^2 \cdot x^2 = 3x^2 \quad | -3x^2$

$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

2. Substitution:  $x^2 = u$

3.  $u$  für  $x^2$  in die Gleichung einsetzen:  $u^2 - 3u + 2 = 0$

4. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

**Lösung:**  $u_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$  und  $u_2 = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

5. Resubstitution:  $x^2 = u_1$  und  $x^2 = u_2$ , also  $x^2 = 2$  und  $x^2 = 1$

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{\quad}$   $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\quad}$

$x = \pm\sqrt{2}$   $x = \pm\sqrt{1}$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$   $\Rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1$

## 1.7 Satz vom Nullprodukt

$u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen (z.B.  $u(x) = x$ ,  $v(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  oder  $u(x) = x^2 - 1$ ,  $v(x) = 2 - e^x$  usw.). Der Satz vom Nullprodukt besagt: Das Produkt zweier Funktionen (Terme) ist 0 (also  $u(x) \cdot v(x) = 0$ ), wenn **mindestens** eine der beiden Funktionen (Terme) ( $u(x)$ ,  $v(x)$ ) 0 ist ( $u(x) = 0$  und/oder  $v(x) = 0$ ). Logisch, denn 0 MAL irgendetwas, z.B. 0 MAL irgendeinen beliebigen Term (Funktion), oder auch 0 MAL eine beliebige Zahl, ergibt immer 0.

Ist die Aufgabenstellung eine Gleichung der Form  $u(x) \cdot v(x) = 0$  zu lösen, betrachtet man also jede Funktion (Term) für sich und setzt diese gleich 0 ( $u(x) = 0$  und  $v(x) = 0$ ). Jeweiliges Auflösen nach der Variablen  $x$  liefert nach dem Satz vom Nullprodukt die gesuchten Lösungen der Gleichung  $u(x) \cdot v(x) = 0$ .

$$\underbrace{u(x)}_{=0} \cdot \underbrace{v(x)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0 \text{ und } v(x) = 0 \text{ berechnen}$$

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $(x^2 - 3) \cdot (2 - e^x - \frac{1}{e^x}) = 0$ .

1. Setze linke und rechte Seite vom Produkt gleich 0:  $\underbrace{(x^2 - 3)}_{=0} \cdot \underbrace{(2 - e^x - \frac{1}{e^x})}_{=0} = 0$

$$x^2 - 3 = 0 \quad | +3 \qquad 2 - e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x$$

$$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \qquad 2e^x - e^{2x} - \frac{e^x}{e^x} = 0$$

$$x = \pm\sqrt{3} \qquad -e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$$

2.  $\Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$  und  $x_2 = -\sqrt{3}$ . Bei 2. Gleichung Substitution:  $e^x = u$

3.  $u$  für  $e^x$  in die Gleichung  $(-e^{2x} + 2e^x - 1 = 0)$  einsetzen:  $-u^2 + 2u - 1 = 0$

4. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

$$\text{Lösung: } u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\Rightarrow u_1 = 1$$

5. Resubstitution:  $e^x = u_1$ , also  $e^x = 1$

$$e^x = 1 \quad | \ln(\phantom{x})$$

$$\ln(e^x) = \ln 1$$

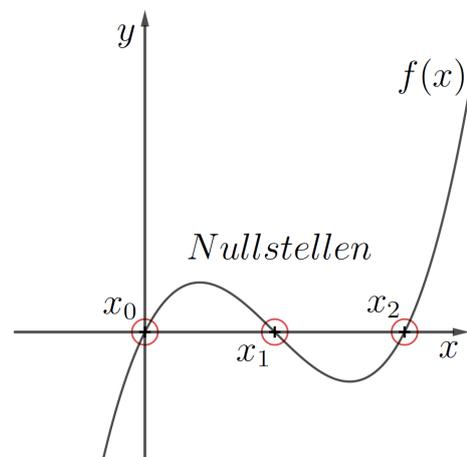
$$x \cdot \ln(e) = 0$$

$$x \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

## 1.8 Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen die Funktion  $f(x)$  die  $x$ -Achse schneidet oder berührt. Sie lassen sich berechnen, indem die Funktion  $f(x)$  gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Diese Lösungen für  $x$  sind die Nullstellen der Funktion  $f(x)$ .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \text{Die Lösungen } x_0, x_1, x_2, \dots \\ \text{sind die Nullstellen von } f(x)$$



**Beispiel.** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ .

1. Setze  $f(x) = 0 : x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. Löse die Gleichung nach  $x$  auf:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad | \text{ } x \text{ ausklammern}$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad | : x \Rightarrow x_0 = 0 \text{ (Satz vom Nullprodukt } \Rightarrow \text{ 1. Nullstelle von } f(x))$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \text{pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)}$$

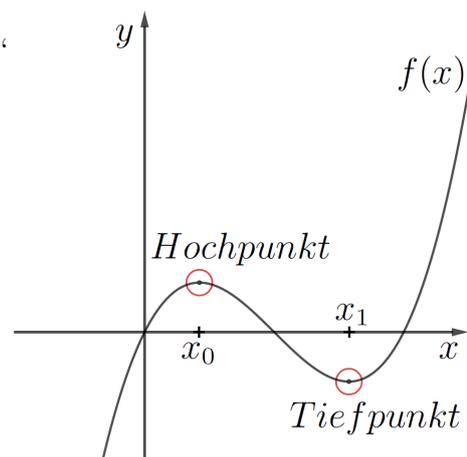
$$\text{Lösung: } x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ und } x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (2. und 3. Nullstelle von } f(x))$$

## 1.9 Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt)

Die Extremstellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen die Funktion  $f(x)$  weder „steigt“ noch „fällt“, d.h. die Steigung beträgt an diesen Stellen **Null**. Da die **Ableitung** einer Funktion ( $f'(x)$ ) die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ), lassen sich diese Extremstellen berechnen, indem die Ableitung der Funktion (also  $f'(x)$ ) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Diese Lösungen für  $x$  sind die Extremstellen der Funktion  $f(x)$ .

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{Die Lösungen } x_0, x_1, x_2, \dots \\ \text{sind die Extremstellen von } f(x)$$



Die Extremstellen geben entweder einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt an.

**Hochpunkt:** Das charakteristische für einen Hochpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann „fällt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt genau dann ein Hochpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  eine **negative** Zahl ergibt.

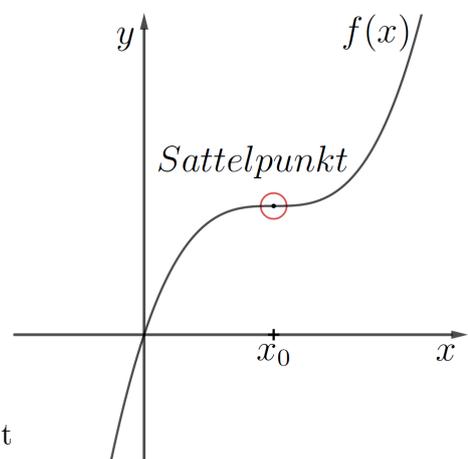
Wenn  $f''(x_0) < 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  hat an der Extremstelle  $x_0$  einen Hochpunkt

**Tiefpunkt:** Das charakteristische für einen Tiefpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann „ansteigt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt genau dann ein Tiefpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  eine **positive** Zahl ergibt.

Wenn  $f''(x_0) > 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  hat an der Extremstelle  $x_0$  einen Tiefpunkt

**Sattelpunkt:** Das charakteristische für einen Sattelpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  entweder vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann weiter „ansteigt“ oder vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann weiter „fällt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt ein Sattelpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  Null ergibt und die Extremstelle eingesetzt in die 3. Ableitung ungleich Null ergibt:

Wenn  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  hat an der Extremstelle  $x_0$  einen Sattelpunkt



**Hinweis:** Ist die Aufgabenstellung die **Extrempunkte** einer Funktion  $f(x)$  zu berechnen (Gesucht ist der zugehörige  $x$ - und  $y$ -Wert der Extremstelle:  $E(x|y)$ ), so müssen neben den Extremstellen  $(x_0, x_1, \dots)$  auch die zugehörigen Extremwerte  $(y_0, y_1, \dots)$  bestimmt werden. Diese erhält man, indem man die Extremstellen  $(x_0, x_1, \dots)$  in die Funktion  $f(x)$  einsetzt, also:  $(f(x_0), f(x_1), \dots) = (y_0, y_1, \dots)$ .

$$\text{Extrempunkt (Extremstelle|Extremwert)} = E(x_0|f(x_0)) = E(x_0|y_0)$$

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ .

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ :

$$f'(x) = \frac{3}{3}x^{3-1} - \frac{3 \cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$f''(x) = 2x^{2-1} - 3 = 2x - 3$$

$$f'''(x) = 2 - 0 = 2$$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen: Also  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \text{pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ und } \mathbf{x_2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (1. und 2. Extremstelle von } f(x)\text{)}$$

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt (von } f(x) \text{ an der Extremstelle } x_0 = 2)$$

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt (von } f(x) \text{ an der Extremstelle } x_1 = 1)$$

4. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $f(x)$  einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ hat den Tiefpunkt T } \left(2 \mid \frac{2}{3}\right).$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{2 - 9 + 12}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ hat den Hochpunkt H } \left(1 \mid \frac{5}{6}\right).$$

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion  $g(x) = (x - 1)^3 + 1$ .

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $g(x) = (x - 1)^3 + 1$ :

$$g'(x) = 3(x - 1)^{3-1} \cdot 1 = 3(x - 1)^2$$

$$g''(x) = 6(x - 1)^{2-1} \cdot 1 = 6(x - 1) = 6x - 6$$

$$g'''(x) = 6 - 0 = 6$$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen: Also  $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 0$$

$$3(x - 1)^2 = 0 \quad | : 3$$

$$\frac{3(x-1)^2}{3} = \frac{0}{3}$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x-1 = \pm\sqrt{0} \quad | +1$$

$$\Rightarrow \mathbf{x_0 = 1} \quad (1. \text{ Extremstelle von } g(x))$$

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$$g''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \text{eventuell liegt ein Sattelpunkt vor}$$

4. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Sattelpunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 1. Ableitung argumentieren, welcher Extrempunkt vorliegt  $\Rightarrow$  siehe Monotonieverhalten einer Funktion)

$$g'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt (von } g(x) \text{ an der Extremstelle } x_0 = 1)$$

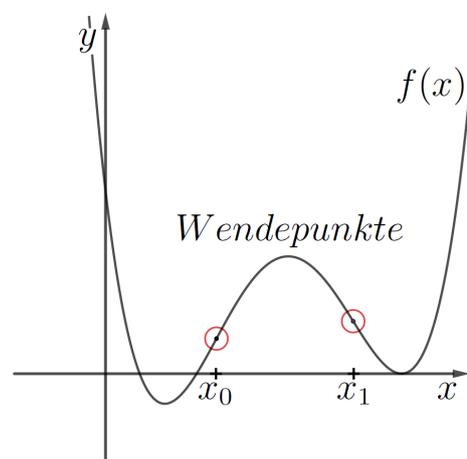
5. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $g(x)$  einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$$g(1) = (1-1)^3 + 1 = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ hat den Sattelpunkt } S(1|1).$$

## 1.10 Wendestellen, -punkte

Die Wendestellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen der Funktionsgraph von  $f(x)$  sein Krümmungsverhalten ändert. D.h. der Graph von  $f(x)$  wechselt von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt von einer Rechts- in eine Linkskurve. Diese Wendestellen lassen sich berechnen, indem die 2. Ableitung der Funktion (also  $f''(x)$ ) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Wenn diese Lösungen für  $x$  eingesetzt in die 3. Ableitung der Funktion (also  $f'''(x)$ ) ungleich Null ergeben, so sind sie die Wendestellen der Funktion  $f(x)$ .



$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{Wenn für die Lösungen } x_0, x_1, x_2, \dots \text{ gilt: } f'''(x_{0,1,2,\dots}) \neq 0$$

so sind sie Wendestellen von  $f(x)$

### 1.10.1 Wendepunkt

Ein Punkt auf dem Graphen von  $f(x)$ , bei dem diese „Wende“ (von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt) stattfindet, ist ein Wendepunkt von  $f(x)$ . Der Wendepunkt wird beschrieben durch seinen  $x$ -Wert und  $y$ -Wert:  $W(x_0|y_0)$ . Der  $x$ -Wert ist die Wendestelle  $x_0$  (Berechnung siehe oben). Den  $y$ -Wert erhält man, indem man die Wendestelle  $x_0$  in die Funktion  $f(x)$  einsetzt, also  $f(x_0) = y_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Wendepunkt (Wendestelle|y-wert)} \\ = W(x_0|f(x_0)) = W(x_0|y_0) \end{aligned}$$

**Beispiel.** Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x.$$

1. Berechne die 1., 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x$ :

$$f'(x) = -\frac{3}{6}x^{3-1} + 2x^{2-1} - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$f''(x) = -\frac{1 \cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = -x + 2$$

$$f'''(x) = -1 + 0 = -1$$

2. Die 2. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -x + 2 &= 0 \quad | +x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

3. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Wendepunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 2. Ableitung argumentieren, ob ein Wendepunkt vorliegt  $\Rightarrow$  siehe Krümmungsverhalten einer Funktion)

$$f'''(2) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendepunkt (von } f(x) \text{ an der Wendestelle } x_0 = 2)$$

4. Die Wendestelle in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $f(x)$  einsetzen, den  $y$ -Wert berechnen und schließlich den Wendepunkt aufschreiben:

$$\begin{aligned} f(2) &= -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{8}{6} + 4 - 6 = -\frac{4}{3} + \frac{12}{3} - \frac{18}{3} = \frac{-4 + 12 - 18}{3} = \frac{-10}{3} = -\frac{10}{3} \\ \Rightarrow f(x) &\text{ hat den Wendepunkt } W\left(2 \mid -\frac{10}{3}\right). \end{aligned}$$

### 1.11 NEW-Regel

Die NEW-Regel ist eine Hilfestellung, Zusammenhänge zwischen einer Funktion ( $f(x)$ ) und deren Aufleitung ( $F(x)$ ) sowie deren Ableitungen ( $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ) aufzuzeigen. Dabei stehen die einzelnen Buchstaben in dem Wort *NEW* für:

**N** : Nullstelle  
**E** : Extremstelle  
**W** : Wendestelle

Um die NEW-Regel anzuwenden, schreibt ihr sie folgendermaßen auf:

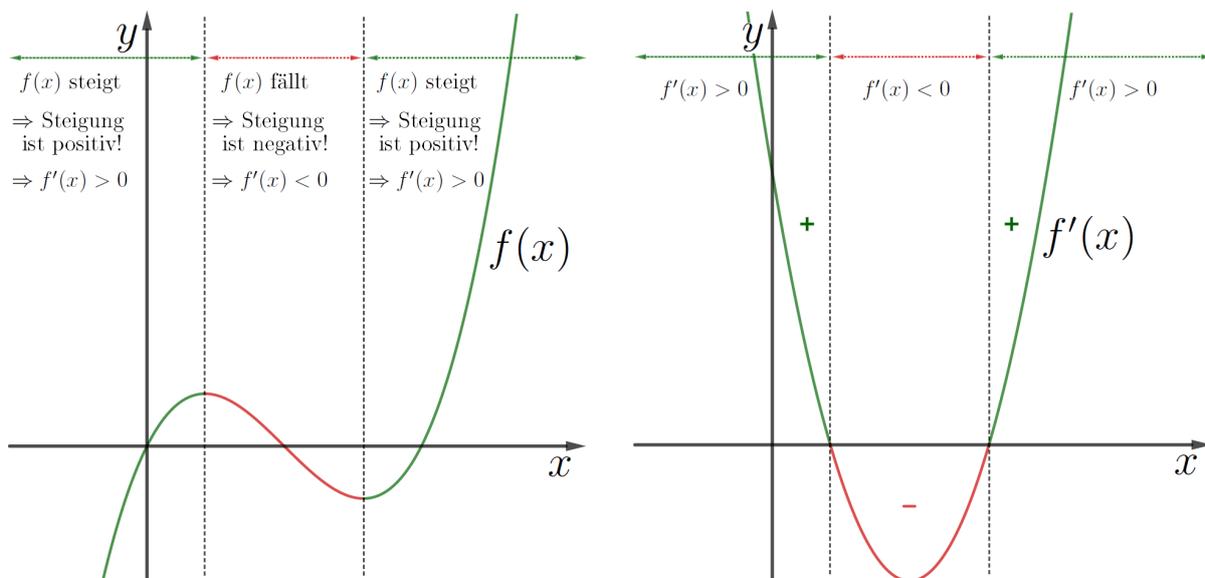
$F(x)$	$N$	$E$	$W$		
$f(x)$		$N$	$E$	$W$	
$f'(x)$			$N$	$E$	$W$
$f''(x)$				$N$	$E$ $W$

Nun lässt sich **spaltenweise** ablesen, welche Stellen (Null-, Extrem-, oder Wendestelle) in den jeweiligen „Funktionsstadien“ ( $F(x)$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$  und  $f''(x)$ ) aufeinander folgen. Haben wir beispielsweise in der Funktion  $f(x)$  eine Wendestelle vorliegen, so hat  $f'(x)$  an genau dieser Stelle eine Extremstelle und  $f''(x)$  eine Nullstelle. Weiteres Lesebeispiel: Hat  $f'(x)$  eine Nullstelle, so ist an genau dieser Stelle bei  $f(x)$  eine Extremstelle und bei  $F(x)$  eine Wendestelle.

### 1.12 Zusammenhänge der Graphen von $F$ , $f$ , $f'$ und $f''$

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen einer Funktion  $f(x)$  und deren Ableitung  $f'(x)$ . Die **Ableitung**  $f'(x)$  gibt die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  an ( **$f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$** ). D.h. wenn die Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $x$  ansteigt, so ist die Steigung an dieser Stelle positiv und dementsprechend nimmt  $f'(x)$  an genau dieser Stelle einen positiven Wert an. Fällt die Funktion  $f(x)$  so ist die Steigung an dieser Stelle negativ und  $f'(x)$  nimmt an dieser Stelle einen negativen Wert an.

**Hinweis:** Dieser Zusammenhang gilt auch zwischen  $F(x)$  und deren Ableitung  $f(x)$  sowie  $f'(x)$  und deren Ableitung  $f''(x)$ .

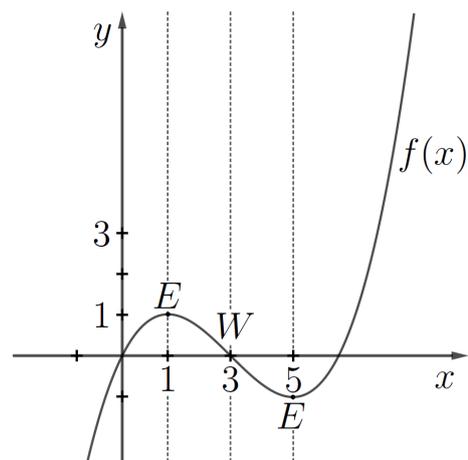


### 1.12.1 Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen $f$ , $f'$ und $f''$

Wir betrachten nun mit Hilfe der NEW-Regel die graphischen Zusammenhänge zwischen  $f(x)$ ,  $f'(x)$  und  $f''(x)$  in den Schaubildern auf der rechten Seite. Die NEW-Regel hierfür lautet:

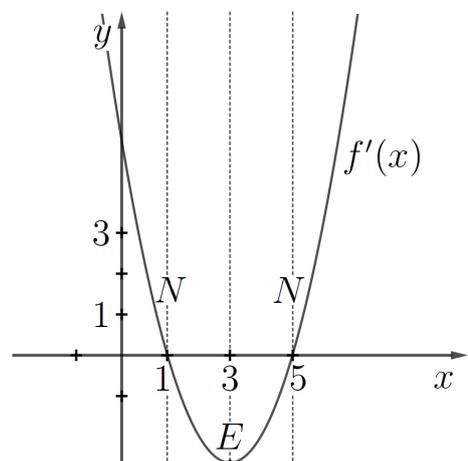
$f(x)$	$N$	$E$	$W$		
$f'(x)$		$N$	$E$	$W$	
$f''(x)$			$N$	$E$	$W$

Das 1. Schaubild zeigt die Funktion  $f(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_0 = 1$  eine Extremstelle  $E$  (Hochpunkt von  $f(x)$ ), bei  $x_1 = 3$  eine Wendestelle  $W$  (Wendepunkt von  $f(x)$ ) und bei  $x_2 = 5$  eine Extremstelle  $E$  (Tiefpunkt von  $f(x)$ ).



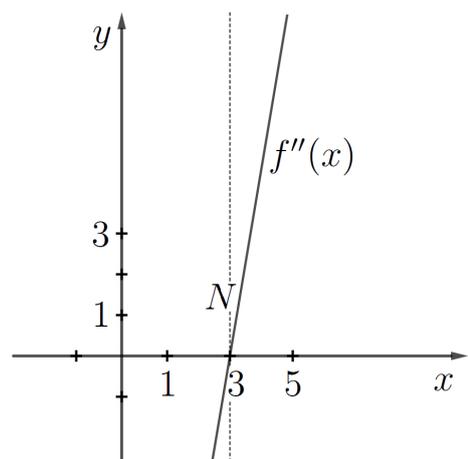
Wenn in der Funktion  $f(x)$  eine Extremstelle  $E$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung  $f'(x)$  an dieser Stelle eine Nullstelle  $N$  und wenn in der Funktion  $f(x)$  eine Wendestelle  $W$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung  $f'(x)$  an dieser Stelle eine Extremstelle  $E$ .

Das 2. Schaubild zeigt die 1. Ableitung  $f'(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_0 = 1$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f'(x)$ ), bei  $x_1 = 3$  eine Extremstelle  $E$  (Tiefpunkt von  $f'(x)$ ) und bei  $x_2 = 5$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f'(x)$ ).



Wenn in der 1. Ableitung  $f'(x)$  eine Extremstelle  $E$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 2. Ableitung  $f''(x)$  an dieser Stelle eine Nullstelle  $N$ .

Das 3. Schaubild zeigt die 2. Ableitung  $f''(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_1 = 3$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f''(x)$ ).



**Hinweis:** Diese graphischen Zusammenhänge gelten auch zwischen  $F(x)$ ,  $f(x)$  und  $f'(x)$  (siehe NEW-Regel).

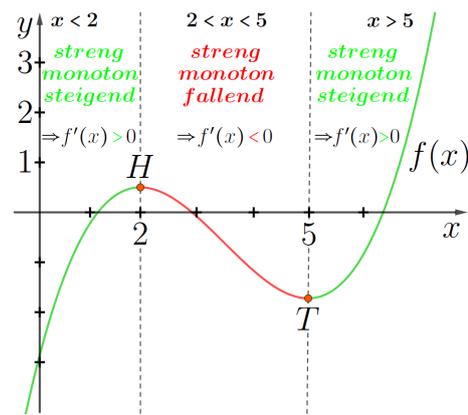
## 1.13 Monotonieverhalten einer Funktion

Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion  $f(x)$  steigt oder fällt. Da die **Ableitung**  $f'(x)$  die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ) gilt für das Monotonieverhalten einer Funktion:

Wenn  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  ist **streng monoton steigend**

Wenn  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  ist **streng monoton fallend**

Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Monotonieverhalten der Funktion  $f(x)$ :



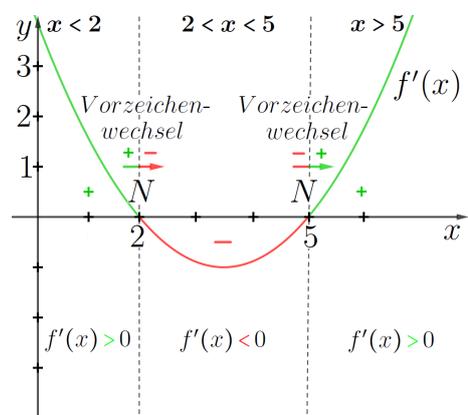
Im Bereich/Intervall  $x < 2$  ist  $f(x)$  **streng monoton steigend**

Im Bereich/Intervall  $2 < x < 5$  ist  $f(x)$  **streng monoton fallend**

Im Bereich/Intervall  $x > 5$  ist  $f(x)$  wieder **streng monoton steigend**

Die Punkte an denen sich das Monotonieverhalten ändert, sind entweder Hoch- oder Tiefpunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Hochpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  davor ansteigt ( $\Rightarrow f'(x) > 0$ ) und anschließend fällt ( $\Rightarrow f'(x) < 0$ ). Beim Tiefpunkt verhält es sich genau andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Monotonieverhalten von  $f(x)$ , indem man die Extremstellen von  $f(x)$ , also die Nullstellen  $N$  der 1. Ableitung  $f'(x)$  bestimmt und anschließend  $x$ -Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 1. Ableitung  $f'(x)$  einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 1. Ableitung  $f'(x)$  vor (also entweder von  $+$  nach  $-$  oder andersherum), so ist die berechnete Extremstelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Monotonieverhalten von  $f(x)$ . Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ist die berechnete Extremstelle ein Sattelpunkt und das Monotonieverhalten ändert sich nicht.



**Hinweis:** Man kann somit also auch durch Bestimmung des Monotonieverhaltens einer Funktion  $f(x)$  herausfinden, ob an einer Extremstelle ein Hochpunkt, Tiefpunkt oder Sattelpunkt vorliegt:

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  ein VZW von  $+$  nach  $- \Rightarrow$  Hochpunkt in  $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  ein VZW von  $-$  nach  $+$   $\Rightarrow$  Tiefpunkt in  $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  **kein** VZW  $\Rightarrow$  Sattelpunkt in  $f(x)$

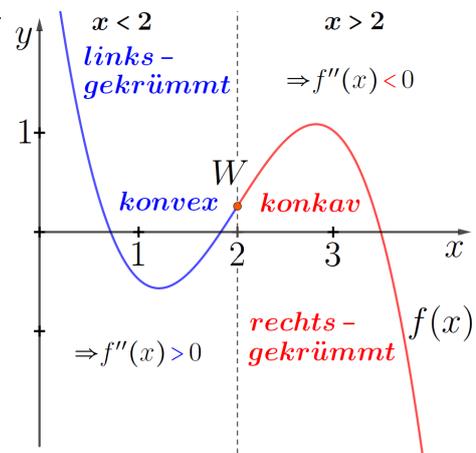
## 1.14 Krümmungsverhalten einer Funktion

Das Krümmungsverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion  $f(x)$  entlang einer Linkskurve, entlang einer Rechtskurve oder einfach nur „gerade“ verläuft. Die 2. Ableitung  $f''(x)$  gibt uns Auskunft über das Krümmungsverhalten einer Funktion:

Wenn  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  ist linksgekrümmt/konvex

Wenn  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  ist rechtsgekrümmt/konkav

Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Krümmungsverhalten der Funktion  $f(x)$ :

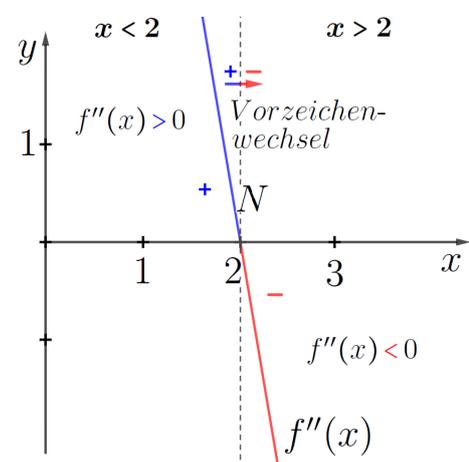


Im Bereich/Intervall  $x < 2$  ist  $f(x)$  linksgekrümmt/konvex

Im Bereich/Intervall  $x > 2$  ist  $f(x)$  rechtsgekrümmt/konkav

Die Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, sind Wendepunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Wendepunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  an diesem Punkt eine „Wende“ vornimmt, entweder von einer Links- in eine Rechtskurve oder andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Krümmungsverhalten von  $f(x)$ , indem man die Wendestellen von  $f(x)$ , also die Nullstellen der 2. Ableitung  $f''(x)$  bestimmt und anschließend  $x$ -Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 2. Ableitung  $f''(x)$  einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 2. Ableitung  $f''(x)$  vor (also entweder von  $+$  nach  $-$  oder andersherum), so ist die berechnete Wendestelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Krümmungsverhalten von  $f(x)$ . Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ändert sich das Krümmungsverhalten von  $f(x)$  nicht.



## 1.15 Tangente

Eine **Tangente**  $t$  ist eine Gerade, die die Funktion  $f(x)$  an einem Punkt berührt (dem sogenannten **Berührungspunkt**  $B(x_b|y_b)$ ). Berühren bedeutet, dass die Steigung der **Tangente**  $t$  die Gleiche ist, wie die Steigung der Funktion  $f(x)$  am **Berührungspunkt**  $B$ . D.h.  $t$  und  $f(x)$  schneiden sich NICHT im Punkt  $B$ , sondern berühren sich dort.

Da die **Ableitung** einer Funktion ( $f'(x)$ ) die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ), wird die Steigung von  $f(x)$  am **Berührungspunkt**  $B$  mit Einsetzen des  $x$ -Werts  $x_b$  in die Ableitung  $f'(x)$  berechnet.

$$\begin{aligned} f'(x_b) &= \text{Steigung der Funktion } f(x) \text{ bei } B \\ &= \text{Steigung der Tangente } t \end{aligned}$$

Eine **Tangente**  $t$  wird mit einer Tangentengleichung beschrieben. Die allgemeine Form der Tangentengleichung ist:

$$t: y = m \cdot x + c$$

Dabei ist  $m$  die Steigung der **Tangente**  $t$  und  $c$  ist der Schnittpunkt von  $t$  mit der  $y$ -Achse. Um also die Tangentengleichung einer **Tangente**  $t$  aufzustellen, muss man nur  $m$  und  $c$  herausfinden, in die allgemeine Form der Tangentengleichung einsetzen und erhält die Geradengleichung für die **Tangente**  $t$ . Das Schema zur Bestimmung einer Tangentengleichung ist folgendes:

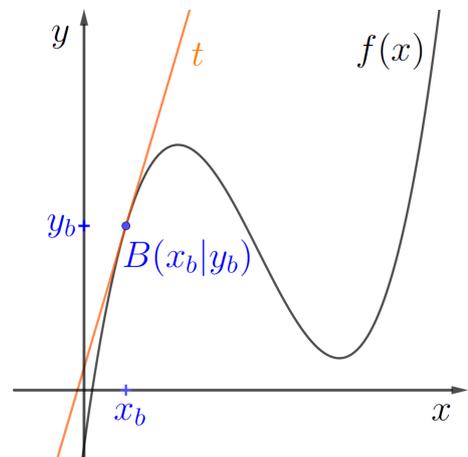
1. Bestimme den  $x$ -Wert und den  $y$ -Wert des **Berührungspunktes**  $B(x_b|y_b)$ .
2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf:  $t: y = m \cdot x + c$
3. Berechne die 1. Ableitung von  $f(x)$ , also  $f'(x)$ .
4. Setze  $x_b$  in  $f'(x)$  ein und erhalte  $m$ :  $f'(x_b) = m$
5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung  $m$  ein, für  $x$  setze  $x_b$  ein und für  $y$  setze  $y_b$  ein. Anschließend löse die Gleichung nach  $c$  auf:

$$y_b = m \cdot x_b + c$$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung  $t$  auf, indem du  $m$  und  $c$  in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt:  $t: y = m \cdot x + c$

**Hinweis:** Ist die Aufgabenstellung eine sogenannte Wendetangente der Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, dann ist damit die Tangente gemeint, die durch den Wendepunkt der Funktion  $f(x)$  verläuft. D.h. der **Berührungspunkt** ist der Wendepunkt von  $f(x)$  (In diesem Fall schneidet die Tangente auch die Funktion  $f(x)$  im Punkt  $B$ ). Also muss man zuerst den  $x$ - und  $y$ -Wert dieses Wendepunktes bestimmen.

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Tangente der Funktion  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$  an der Stelle  $x = 1$ .



1. Bestimme den  $x$ - und  $y$ -Wert des **Berührungspunktes**: Setze  $x_b = 1$  in  $f(x)$  ein  
 $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 4 + 2 = -1 = y_b \Rightarrow$  **Berührungspunkt**  $B(1 | -1)$

2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf:

$$t: y = m \cdot x + c$$

3. Berechne die 1. Ableitung von  $f(x)$ , also  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$$

4. Setze  $x_b = 1$  in  $f'(x)$  ein und erhalte  $m$ :

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 3 - 8 + 2 = -3 = m$$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung  $m = -3$  ein, für  $x$  setze  $x_b = 1$  ein und für  $y$  setze  $y_b = -1$  ein. Nun löse die Gleichung nach  $c$  auf:

$$-1 = -3 \cdot 1 + c \quad | +3$$

$$2 = c$$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung  $t$  auf, indem du  $m = -3$  und  $c = 2$  in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt:

$$t: y = -3x + 2$$

## 1.16 Ganzrationale Funktionen

Bei einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** ist  $n$  der höchste Exponent (Hochzahl) von  $x$ . Seien  $a, b, c, d$  und  $e$  beliebige reelle Zahlen, dann ist zum Beispiel die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **4-ten Grades**:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \Rightarrow 4 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **3-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow 3 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **2-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow 2 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

**Beispiel.**  $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$

$\Rightarrow$  Ganzrationale Funktion 3-ten Grades mit  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -4$  und  $d = 1$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \Rightarrow$  Ganzrationale Funktion 2-ten Grades mit  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  und  $c = 0$

### 1.16.1 Steckbriefaufgabe, Funktionsgleichung bestimmen

Ist die Aufgabenstellung die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** zu bestimmen unter gewissen Bedingungen (z.B. Hochpunkt an Stelle  $x = 1$ ,

Wendepunkt an Stelle  $x = -3$ , Verlauf durch den Ursprung etc.), so schreibt man zunächst die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  **$n$ -ten Grades** auf und bildet davon die 1. und 2. Ableitung ( $f'(x)$  und  $f''(x)$ ). Nun müssen  **$n + 1$**  Gleichungen, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden  **$n + 1$**  Bedingungen an die Funktion  $f(x)$ , aufgestellt werden. Diese  **$n + 1$**  Gleichungen bilden ein Gleichungssystem, das nach den Variablen  $a, b, c, d, \dots$  aufgelöst wird. Schließlich liefert das Einsetzen der berechneten Variablen in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** die zu bestimmende Funktionsgleichung.

**Hinweis:** Entnimmt man der Aufgabenstellung, dass die gesuchte ganzrationale Funktion **achsensymmetrisch** ist, so sind direkt alle gesuchten Variablen  $a, b, c, d, \dots$  GLEICH Null, die vor einem  $x$  mit **ungeradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**). Ist die gesuchte ganzrationale Funktion **punktsymmetrisch**, so sind direkt alle gesuchten Variablen  $a, b, c, d, \dots$  GLEICH Null, die vor einem  $x$  mit **geradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**).

**Beispiel.** Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$  dritten Grades hat den Hochpunkt  $H(0|1)$  und an der Stelle  $x = 1$  die Tangente mit der Gleichung  $t: y = -5x + 3$ . Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von  $f(x)$ .

1. Schreibe die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  $f(x)$  3-ten Grades auf und bilde die 1. und 2. Ableitung  $f'(x)$  sowie  $f''(x)$ :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

2. Da  $3 + 1 = 4$  Variablen (nämlich  $a, b, c$  und  $d$ ) bestimmt werden müssen, um die Funktionsgleichung aufstellen zu können, stelle nun 4 Gleichungen auf, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden 4 Bedingungen an die Funktion  $f(x)$ :

Die Funktion  $f(x)$  verläuft durch den Punkt  $H(0|1)$ :

$$f(0) = 1$$

$$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1 \quad (1. \text{ Gleichung})$$

Da  $H(0|1)$  ein Hochpunkt ist, hat  $f(x)$  bei  $x = 0$  eine Extremstelle, deshalb gilt:

$$f'(0) = 0$$

$$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0 \quad (2. \text{ Gleichung})$$

Da  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$  die Tangente  $t$  hat, verläuft die Funktion  $f(x)$  durch den Berührungspunkt  $B(1|-2)$  ( $-2 = y_b$  deshalb, da  $x_b = 1$  eingesetzt in die Tangente

$t: -5 \cdot 1 + 3 = -2$  ist):

$$f(1) = -2$$

$$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -2 \quad \xrightarrow{d=1 \text{ und } c=0} \quad \begin{array}{l} a + b + 0 + 1 = -2 \\ a + b = -3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -1 \\ (3. \text{ Gleichung}) \end{array} \right.$$

Da  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$  die Tangente  $t$  hat, hat  $f(x)$  an dieser Stelle die gleiche Steigung wie  $t$  ( $m_t = -5$ ), deshalb gilt:

$$f'(1) = -5$$

$$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -5 \quad \xrightarrow{c=0} \quad 3a + 2b + 0 = -5$$

$$3a + 2b = -5 \quad (4. \text{ Gleichung})$$

3. Löse das Gleichungssystem. Es gilt nur noch  $a$  und  $b$  mithilfe der 3. und 4. Gleichung herauszufinden. Löse 3. Gleichung nach  $a$  auf und setze dieses  $a$  in die 4. Gleichung ein:

$$(3. \text{ Gleichung}) \quad a + b = -3 \quad | -b$$

$$a = -3 - b$$

$$(4. \text{ Gleichung}) \quad 3a + 2b = -5 \quad | a = -3 - b \text{ einsetzen}$$

$$3(-3 - b) + 2b = -5$$

$$-9 - 3b + 2b = -5 \quad | +9$$

$$-b = 4 \quad | \cdot(-1)$$

$$b = -4$$

$$(3. \text{ Gleichung}) \quad a + b = -3 \quad | b = -4 \text{ einsetzen}$$

$$a - 4 = -3 \quad | +4$$

$$a = 1$$

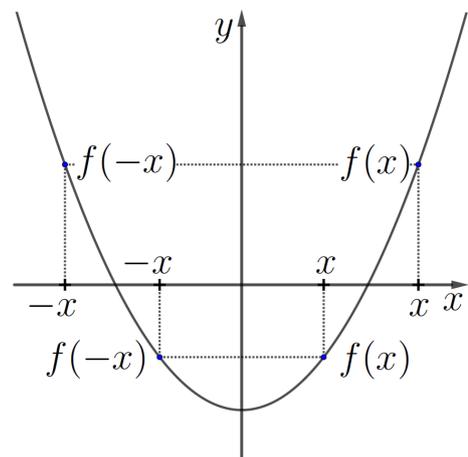
4. Einsetzen der berechneten Variablen  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 0$  und  $d = 1$  in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion dritten Grades liefert die Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

## 1.17 Symmetrie

Bei symmetrischen Funktionen unterscheidet man in Achsensymmetrie (bezüglich der  $y$ -Achse) und Punktsymmetrie (bezüglich dem Ursprung  $(0|0)$ ). Eine Funktion  $f(x)$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn sie spiegelsymmetrisch zur  $y$ -Achse angeordnet ist. D.h. setzt man einen beliebigen **positiven**  $x$ -Wert in die Funktion  $f(x)$  ein, kommt derselbe Funktionswert  $f(x)$  ( $y$ -Wert) heraus, wie wenn man den „gegensätzlichen“ **negativen**  $x$ -Wert in die Funktion  $f(x)$  einsetzt. Also ist eine Funktion  $f(x)$  achsensymmetrisch, wenn für jeden  $x$ -Wert folgendes gilt:

$$f(-x) = f(x)$$



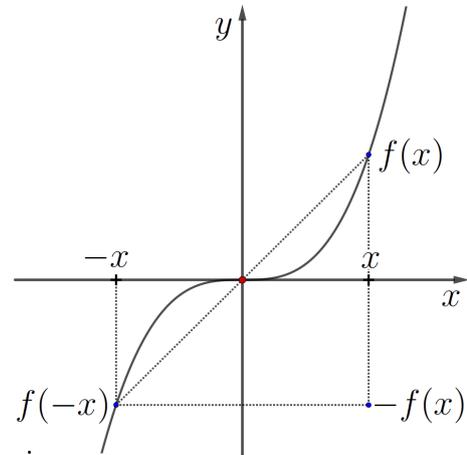
**Beispiel.**  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$  ist achsensymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 - 1 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$$

Eine Funktion  $f(x)$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung  $(0|0)$ , wenn für jeden  $x$ -Wert folgendes gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Das heißt man kann jeden Punkt auf der Funktion  $f(x)$  am Ursprung spiegeln und „landet“ in gleichem Abstand wieder auf der Funktion  $f(x)$ .



**Beispiel.**  $f(x) = x^3 + x$  ist punktsymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$$

**Hinweis:** Bei ganzrationalen Funktionen lässt sich sehr einfach eine Symmetrie erkennen. Eine Achsensymmetrie liegt dann vor, wenn  $f(x)$  **nur gerade** Exponenten (Hochzahlen) bei  $x$  besitzt! Eine Punktsymmetrie liegt dann vor, wenn  $f(x)$  **nur ungerade** Exponenten (Hochzahlen) bei  $x$  besitzt!

## 1.18 Definitionsbereich

Der Definitionsbereich  $D_f$  einer Funktion  $f(x)$  beschreibt alle  $x$ -Werte, die man in die Funktion  $f(x)$  einsetzen „darf“. In der Regel sind Funktionen über die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  definiert. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  umfassen alle Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , also  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[ = -\infty < x < +\infty$ . Einzelne Zahlen, die nicht in die Funktion eingesetzt werden dürfen, bezeichnet man als Definitionslücken. Schreibweise für den Definitionsbereich  $D_f$  einer Funktion  $f(x)$  ist:

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$  Alle reellen Zahlen dürfen für  $x$  eingesetzt werden

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \Rightarrow$  Alle reellen Zahlen bis auf  $x_1, x_2$  dürfen für  $x$  eingesetzt werden  
 $\Rightarrow x_1, x_2$  sind Definitionslücken

$D_f = \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Alle positiven reellen Zahlen größer 0 dürfen für  $x$  eingesetzt werden

$D_f = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$  Alle positiven reellen Zahlen und die 0 dürfen für  $x$  eingesetzt werden

**Beispiel.** Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktionen

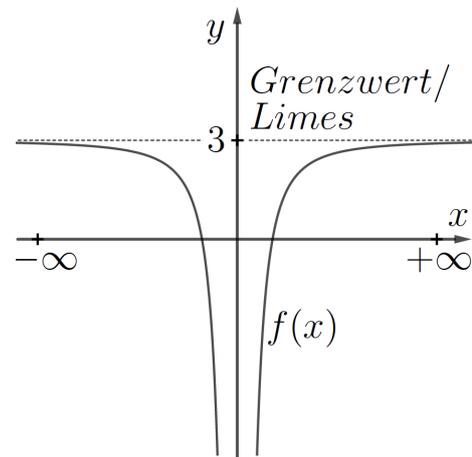
$$f(x) = 2x^2 + 3x - 7, \quad g(x) = \frac{3}{x-1}, \quad h(x) = \ln(x) \quad \text{und} \quad i(x) = \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^2 + 3x - 7 && \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\
 g(x) &= \frac{3}{x-1} && \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\
 h(x) &= \ln(x) && \Rightarrow D_h = \mathbb{R}^+ \\
 i(x) &= \sqrt{x} && \Rightarrow D_i = \mathbb{R}_0^+
 \end{aligned}$$

## 1.19 Grenzwert/Limes einer Funktion

Der Grenzwert oder auch Limes einer Funktion  $f(x)$  beschreibt das Grenzverhalten dieser Funktion. Die „Grenzen“ sind dabei  $+\infty$  und  $-\infty$  auf der  $x$ -Achse. Die Frage des Grenzwerts/Limes einer Funktion  $f(x)$  ist also: Was passiert mit der Funktion  $f(x)$ , wenn einmal  $x$  gegen  $+\infty$  und einmal  $x$  gegen  $-\infty$  geht, gegen welchen Wert strebt  $f(x)$  an diesen „Grenzen“? Die Schreibweise ist folgende:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{ (für } x \text{ gegen } +\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...)} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \text{ (für } x \text{ gegen } -\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...)}
 \end{aligned}$$



Beispielsweise strebt im rechten Schaubild die Funktion  $f(x)$  sowohl für die „Grenze“  $x = +\infty$ , als auch für  $x = -\infty$  gegen den Grenzwert/Limes 3. Also in diesem Fall  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ .

Für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion  $f(x)$  setzen wir einmal für  $x = +\infty$  ein sowie einmal  $x = -\infty$  ein und schauen dann, was bei der Funktion rauskommt. Wichtig ist es ein Verständnis dafür zu bekommen, was dieses „Einsetzen von  $\infty$  für  $x$ “ mit verschiedenen Termen macht. Die wichtigste Erkenntnis ist, dass  $\frac{1}{\infty} = 0$  ist, also  $\frac{1}{\text{Eine riesengroße Zahl (nämlich } \infty)}$  = 0. Anbei einige Beispiele fürs Verständnis:

$$\begin{aligned}
 f(x) = x + 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty + 2 = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty + 2 = -\infty \\
 f(x) = x^2 - 5, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (-\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
 f(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \\
 f(x) = \frac{3}{x+2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\infty+2} = \frac{3}{\infty} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\infty+2} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\
 f(x) = e^x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^\infty = \infty \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 f(x) = \frac{1}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-\infty}} = e^\infty = \infty
 \end{aligned}$$

**Hinweis:** Die in den obigen Beispielen benutzte Schreibweise soll nur zum Verständnis dienen und kann in einer Nebenrechnung angewandt werden. Die **korrekte** mathematische Schreibweise für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion ist in den folgenden Beispielen dargestellt. Hierbei zeigen geschweifte Klammern unter den Termen an, was mit dem Term passiert wenn  $x$  gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$  strebt.

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+7} - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = 30 + \frac{3}{e^x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\rightarrow 0} - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\rightarrow 0} - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 30 + \underbrace{\frac{3}{e^x}}_{\rightarrow 0} = 30 + 0 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 30 + \frac{3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 30 + 3 \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow \infty} = \infty$$

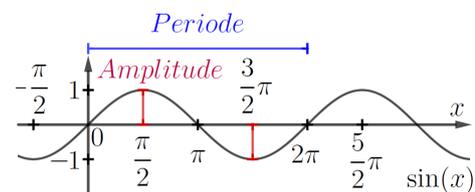
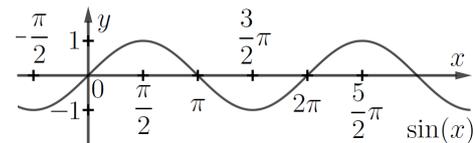
## 1.20 Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus)

Die folgenden trigonometrischen Funktionen, oder auch Winkelfunktionen genannt, werden im Bogenmaß betrachtet. Das Bogenmaß ist wie das Gradmaß ein Winkelmaß und wird in Abhängigkeit von  $\pi$  angegeben:

Winkelmaß	Bogenmaß
0	0
90°	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$
180°	$\pi \approx 3,14$
360°	$2\pi \approx 6,28$

Im rechten Schaubild ist die normale Sinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Sinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:

$x$ -Wert	$y$ -Wert
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\pi$	$\sin(\pi) = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$
$2\pi$	$\sin(2\pi) = 0$



Die **Periode** der normalen Sinusfunktion beträgt  $2\pi$ .

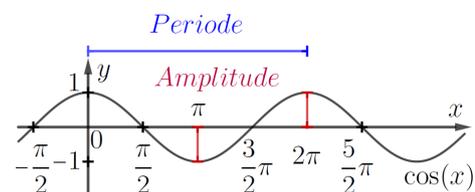
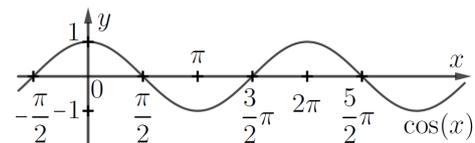
Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle an.

Eine Welle besteht aus einem „Berg“ und einem „Tal“. Die Sinusfunktion startet im Ursprung (also bei 0) durchläuft einen „Berg“ und danach ein „Tal“. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Sinusfunktion periodisch.

Die **Amplitude** der normalen Sinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags“ in  $y$ -Richtung der Sinusfunktion nach oben und unten an.

Im rechten Schaubild ist die normale Cosinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Cosinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:

$x$ -Wert	$y$ -Wert
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\pi$	$\cos(\pi) = -1$
$\frac{3}{2}\pi$	$\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$
$2\pi$	$\cos(2\pi) = 1$



Die **Periode** der normalen Cosinusfunktion beträgt  $2\pi$ . Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle

an. Eine Welle besteht aus einem „Berg“ und einem „Tal“. Die Cosinusfunktion startet bei 1 (beim „Gipfel des Berges“) durchläuft ein „Tal“ und kommt anschließend wieder bei 1 (beim „Gipfel des 2. Berges“) an. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Cosinusfunktion periodisch.

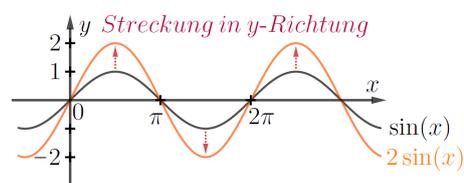
Die **Amplitude** der normalen Cosinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags“ in  $y$ -Richtung der Cosinusfunktion nach oben und unten an.

### 1.20.1 Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften

Die allgemeine Sinusfunktion hat die folgende Funktionsgleichung:

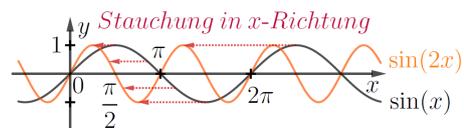
$$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

Das  $a$  gibt die **Amplitude** der Sinusfunktion an und damit die Streckung/Stauchung der Funktion in  $y$ -Richtung. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $2 \sin(x)$   $a = 2$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion  $\sin(x)$  um das 2-fache in  $y$ -Richtung gestreckt. Die Amplitude beträgt somit 2.



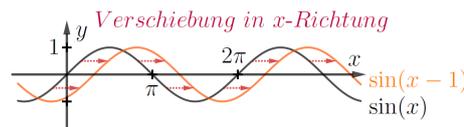
Das  $b$  bestimmt die Periode (Länge einer Welle) und gibt somit die Streckung/Stauchung der Funktion in  $x$ -Richtung an. Formel zur Berechnung der Periode  $P$  ist:

$$P = \frac{2\pi}{b}$$

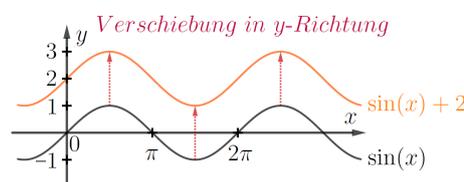


Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(2x)$ ,  $b = 2$ . Die Periode beträgt somit  $\pi$ .

Das  $c$  gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in  $x$ -Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(x - 1)$ ,  $c = 1$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 1 nach rechts verschoben.



Das  $d$  gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in  $y$ -Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(x) + 2$ ,  $d = 2$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 2 nach oben verschoben.



**Hinweis:** Diese Eigenschaften gelten genauso für die allgemeine Cosinusfunktion:  $f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$ .

## 1.21 Funktionenschar

Eine Funktionenschar  $f_k(x)$  ist eine Vielzahl von Funktionen, die dasselbe „Muster“ haben. Neben dem Parameter  $x$  hat eine Funktionenschar  $f_k(x)$  noch einen weiteren Parameter  $k$  für den beliebige Werte eingesetzt werden können (oft ist der weitere Parameter auch  $a$ , dann ist die Funktionenschar  $f_a(x)$ ). Zu jedem Wert des Parameters  $k$  gehört eine Funktion der Funktionenschar. Beispiel für eine Funktionenschar  $f_k(x)$  und den zugehörigen Funktionen mit  $k = 1, k = 2, k = 3, k = 4$  wäre:

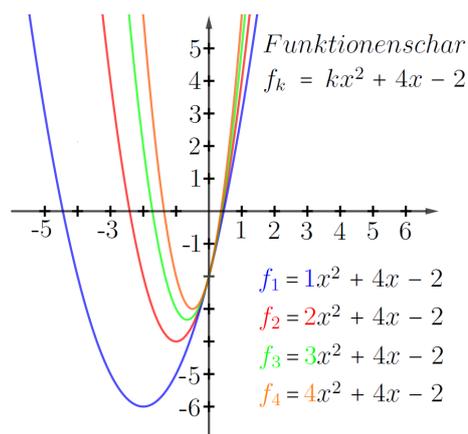
$$f_k = kx^2 + 4x - 2$$

$$k = 1: f_1 = 1x^2 + 4x - 2$$

$$k = 2: f_2 = 2x^2 + 4x - 2$$

$$k = 3: f_3 = 3x^2 + 4x - 2$$

$$k = 4: f_4 = 4x^2 + 4x - 2$$



**Rechnen mit Funktionenscharen:** Sofern für den Parameter  $k$  kein explizierter Wert angegeben ist, so betrachtet  $k$  einfach als eine „normale Zahl“, also in Rechnungen wie bei einer „normalen Zahl“ vorgehen. Die Lösungen solcher Rechnungen sind dann meist keine konkrete Zahl, sondern in Abhängigkeit von dem Parameter  $k$  (d.h. in der Lösung ist das  $k$  vorhanden).

**Beispiel.** Berechne die Extrempunkte der Funktionenschar  $f_k(x) = kx^2 + 4x - 2$ .

1. Berechne die 1. Ableitung der Funktionenschar  $f_k(x)$ :

$$f_k(x) = kx^2 + 4x - 2$$

$$f'_k(x) = 2kx + 4 \Rightarrow \text{(Beim Ableiten wurde } k \text{ wie eine „normale Zahl“ gehandhabt)}$$

2. Die 1. Ableitung der Funktionenschar  $f_k(x)$  gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen:

$$f'_k(x) = 0$$

$$2kx + 4 = 0 \quad | -4$$

$$2kx = -4 \quad | : 2k$$

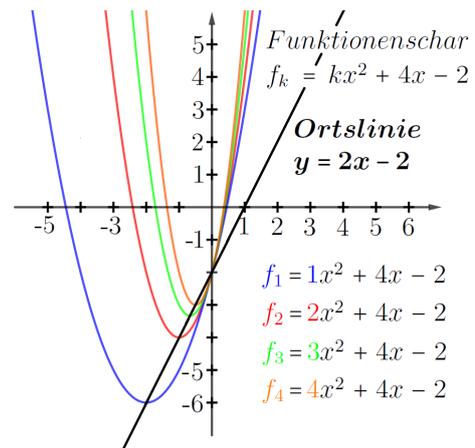
$$x = \frac{-4}{2k} = -\frac{2}{k} \Rightarrow \text{Die Lösung der Extremstelle } x \text{ ist in Abhängigkeit von } k$$

3. Einsetzen der Extremstelle  $x = -\frac{2}{k}$  in  $f_k(x)$  liefert den  $y$ -Wert des Extrempunkts:

$$f_k\left(-\frac{2}{k}\right) = k \cdot \left(-\frac{2}{k}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{k}\right) - 2 = \frac{4k}{k^2} - \frac{8}{k} - 2 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 2 = -\frac{4}{k} - 2 \Rightarrow E\left(-\frac{2}{k} \mid -\frac{4}{k} - 2\right)$$

### 1.21.1 Ortskurve/-linie

Eine Ortskurve/-linie ist eine Funktion, die Punkte einer Funktionenschar  $f_k(x)$  miteinander verbindet, die eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft besitzen. Beispielsweise verbindet eine Ortskurve/-linie alle Hochpunkte einer Funktionenschar miteinander oder alle Wendepunkte, usw.



Die Berechnung einer solchen Ortskurve/-linie erfolgt über die bestimmte gemeinsame Eigenschaft der Punkte auf der Funktionenschar. Ist beispielsweise die Ortskurve/-linie der Tiefpunkte der Funktionenschar  $f_k(x)$  gesucht (siehe rechtes Schaubild), so bestimmt man zunächst allgemein die Tiefpunkte der Funktionenschar  $f_k(x)$   $T(x|y)$  (meist in Abhängigkeit von  $k$ ), löst die Gleichung der berechneten  $x$ -Variable nach dem Parameter  $k$  auf, setzt dieses nun berechnete  $k$  (in Abhängigkeit von  $x$ ) in die Gleichung der berechneten  $y$ -Variable ein und erhält die gesuchte Ortskurve/-linie.

**Beispiel.** Berechne die Ortslinie der Tiefpunkte der Funktionenschar  $f_k(x) = kx^2 + 4x - 2$ .

1. Berechne die 1. Ableitung der Funktionenschar  $f_k(x)$ :

$$f_k(x) = kx^2 + 4x - 2$$

$$f'_k(x) = 2kx + 4 \Rightarrow \text{(Beim Ableiten wurde } k \text{ wie eine „normale Zahl“ gehandhabt)}$$

2. Die 1. Ableitung der Funktionenschar  $f_k(x)$  gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen:

$$f'_k(x) = 0$$

$$2kx + 4 = 0 \quad | -4$$

$$2kx = -4 \quad | : 2k$$

$$x = \frac{-4}{2k} = -\frac{2}{k} \Rightarrow \text{Die Lösung der Extremstelle } x \text{ ist in Abhängigkeit von } k$$

3. Einsetzen der Extremstelle  $x = -\frac{2}{k}$  in  $f_k(x)$  liefert den  $y$ -Wert des Tiefpunkts:

$$f_k\left(-\frac{2}{k}\right) = k \cdot \left(-\frac{2}{k}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{k}\right) - 2 = \frac{4k}{k^2} - \frac{8}{k} - 2 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 2 = -\frac{4}{k} - 2 \Rightarrow T\left(-\frac{2}{k} \mid -\frac{4}{k} - 2\right)$$

4. Die Gleichung der berechneten  $x$ -Variable  $x = -\frac{2}{k}$  nach  $k$  auflösen:

$$x = -\frac{2}{k} \quad | \cdot k \quad | : x \quad \Rightarrow k = -\frac{2}{x}$$

5. Durch einsetzen von  $k = -\frac{2}{x}$  in die Gleichung der berechneten  $y$ -Variable  $y = -\frac{4}{k} - 2$  erhält man die gesuchte Ortslinie:

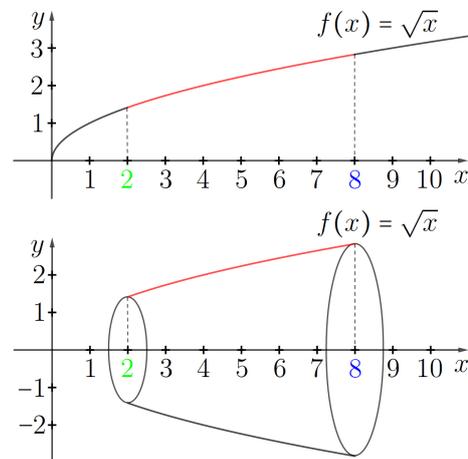
$$y = -\frac{4}{2} - 2 \Rightarrow \text{Ortslinie: } y = 2x - 2$$

## 1.22 Rotationskörper - Volumen berechnen

Lässt man eine Funktion  $f(x)$  in einem bestimmten Intervall  $I = [a, b]$  um die  $x$ -Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Das Volumen  $V$  dieses Rotationskörpers berechnet sich folgendermaßen:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  rotiert um die  $x$ -Achse im Bereich  $2 \leq x \leq 8$ , wobei ein Rotationskörper entsteht. Berechne dessen Volumen.



Einsetzen der Funktion  $f(x)$  und das Intervall  $I = [2, 8]$  in die obige Formel liefert das Volumen:

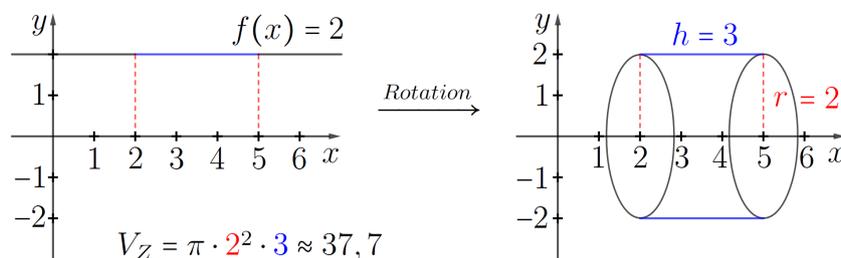
$$V = \pi \int_2^8 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_2^8 x dx = \pi \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_2^8 = \pi \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \right) = 30\pi$$

**Hinweis:** Oftmals lohnt sich ein genauer Blick auf die Aufgabenstellung, ob es sich bei dem gesuchten Rotationskörper um einen Kegel oder einen Zylinder handelt. Dann gilt es nur noch den Radius  $r$  und die Höhe  $h$  herauszufinden, womit sich die beiden Volumina entspannt berechnen lassen:

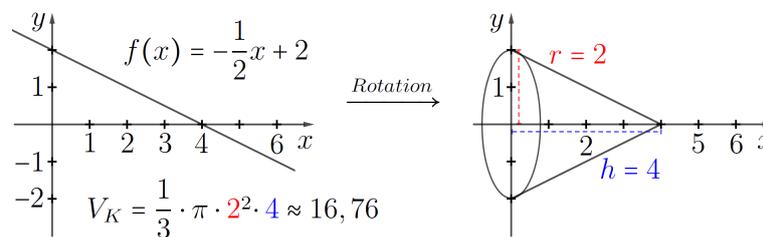
$$\text{Zylinder-Volumen: } V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\text{Kegel-Volumen: } V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = 2$  rotiert um die  $x$ -Achse im Bereich  $[2, 5]$ , wobei ein Rotationskörper entsteht. Berechne dessen Volumen.



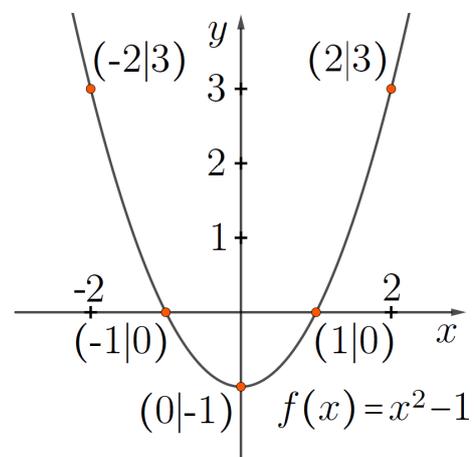
**Beispiel.** Die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  rotiert um die  $x$ -Achse im Bereich  $[0, 4]$ , wobei ein Rotationskörper entsteht. Berechne dessen Volumen.



### 1.23 Funktion zeichnen oder skizzieren

Ist die Aufgabenstellung eine Funktion  $f(x)$  zu zeichnen oder zu skizzieren, ist **höchste zeichnerische Präzision und Aufmerksamkeit** angesagt. Zunächst gilt es sich einen Überblick zu verschaffen, welcher Bereich auf der  $x$ -Achse „darstellerisch relevant“ ist für die Funktion  $f(x)$ . Oft ist in der Aufgabenstellung dafür ein expliziter Definitionsbereich angegeben (z.B.  $-3 \leq x \leq 3$ ) oder ein bestimmter „Zeitraum für  $f(t)$ “ z.B.  $t = 30 \text{ min} \Rightarrow 0 \leq t \leq 30$ ). Wenn kein expliziter Definitionsbereich angegeben ist, so gilt es aus der Aufgabenstellung herauszulesen, welcher Bereich „von Interesse“ ist. Ist in der Aufgabenstellung ausschließlich die Funktion  $f(x)$  gegeben, so spielt sich der Definitionsbereich meist in einem „kleinen Bereich“ ab (z.B.  $-4 \leq x \leq 4$ ).

Sowohl beim Skizzieren als auch beim Zeichnen einer Funktion bietet es sich an die **Wertetabelle** für den „relevanten“ Definitionsbereich einer Funktion  $f(x)$  über den Taschenrechner anzeigen zu lassen (Tabelle der  $x$ - und zugehörigen  $y$ -Werte von  $f(x)$ ). Darf kein Taschenrechner verwendet werden, so fertigt man die Wertetabelle per Hand an und setzt dafür die  $x$ -Werte des „relevanten“ Definitionsbereichs in die Funktion  $f(x)$  ein und berechnet die zugehörigen  $y$ -Werte. Anschließend zeichnet man die Punkte  $(x|y)$  in ein Koordinatensystem ein, dessen Koordinatenachsen an die  $x$ - und  $y$ -Werte in der Wertetabelle angepasst ist. Schließlich verbindet man die Punkte **funktionsgetreu** (d.h. ohne Ecken!) miteinander und erhält den Graphen der Funktion  $f(x)$ .



**Beispiel.** Zeichnen Sie die Funktion  $f(x) = x^2 - 1$  in dem Bereich  $-2 \leq x \leq 2$ :

Wertetabelle:

x-Wert	-2	-1	0	1	2
$f(x) \Rightarrow y$ -Wert	$f(-2) = 3$	$f(-1) = 0$	$f(0) = -1$	$f(1) = 0$	$f(2) = 3$

Einzeichnen der Punkte  $(x|y)$  der Wertetabelle in ein, die Achsen den  $x$ - und  $y$ -Werten angepasstes, Koordinatensystem und anschließendes **funktionsgetreues** verbinden der Punkte liefert das obige Schaubild.

**Hinweis:** Das **Beschriften der Achsen ist wichtig!** Beim Skizzieren einer Funktion muss nicht exakt jeder Punkt eingezeichnet werden. Es geht darum die charakteristischen Eigenschaften (wie Funktionsverlauf, Nullstellen, Extrem- sowie Wendepunkte) grafisch darzustellen.

## 1.24 ln-Regeln

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Zahlen/Variablen. Die Rechenregeln für den  $\ln()$  sind folgende:

1.  $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
2.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3.  $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

Außerdem zu merken ist, dass:

$$e^{\ln(a)} = a$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

**Beispiel.**

$$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln(1) - \ln(5) = 0 - \ln(5) = -\ln(5)$$

$$\ln(x^4) = 4 \ln(x)$$

$$\ln(e^{3x}) = 3x \ln(e) = 3x \cdot 1 = 3x$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$e^{\ln(2)} = 2$$

## 1.25 Potenzregeln

Seien  $a$ ,  $b$  und  $n$  beliebige Zahlen/Variablen. Die Potenzregeln sind:

- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$                      | <b>Beispiel:</b> $x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$                           |
| 2. | $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$                    | <b>Beispiel:</b> $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$                         |
| 3. | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$                | <b>Beispiel:</b> $4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3 = 20^3 = 8000$             |
| 4. | $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ | <b>Beispiel:</b> $\frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 2^4 = 16$ |
| 5. | $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$                      | <b>Beispiel:</b> $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$                           |
| 6. | $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$                       | <b>Beispiel:</b> $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$                                  |
| 7. | $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$                | <b>Beispiel:</b> $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$                           |
| 8. | $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$              | <b>Beispiel:</b> $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$                      |

## 2 Geometrie

### 2.1 LGS - Lineares Gleichungssystem

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, gibt es 3 gängige Verfahren: Das Einsetzungsverfahren (nur bei 2 gesuchten Variablen), das Additions- und das Gaußverfahren.

**Einsetzungsverfahren:** Sind nur 2 Variablen in einem linearen Gleichungssystem zu lösen, bietet das Einsetzungsverfahren eine einfache Möglichkeit. Hierbei wird zunächst eine Gleichung nach einer der beiden gesuchten Variablen aufgelöst und anschließend in die andere Gleichung eingesetzt. Diese Gleichung hat nun nur noch eine Variable und wird nach dieser aufgelöst. Das Ergebnis dieser Variable setzt man wiederum in egal welche Gleichung ein und bestimmt damit das Ergebnis der anderen gesuchten Variable. Beispiel:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 \\ x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

1. Löse die 2. Gleichung nach  $x$  auf (Es bietet sich diese Wahl an, da hier  $x$  bereits „alleine“/ohne Faktor steht. Man kann aber genauso die 1. Gleichung nach  $x$  auflösen):

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 & | -3y \\ x &= 15 - 3y \end{aligned}$$

2. Setze dieses  $x = 15 - 3y$  in die 1. Gleichung ein und löse nach  $y$  auf:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 & | x = 15 - 3y \\ -3(15 - 3y) + 2y &= -1 \\ -45 + 9y + 2y &= -1 & | +45 \\ 11y &= 44 & | : 11 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

3. Setze dieses  $y = 4$  in die 1. oder 2. Gleichung ein und löse nach  $x$  auf:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 & | y = 4 \\ x + 3 \cdot 4 &= 15 \\ x + 12 &= 15 & | -12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Additionsverfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 Variablen zu lösen, bietet das Additionsverfahren eine Möglichkeit. Hierbei werden zunächst die 3 Gleichungen untereinander nummeriert hingeschrieben (römische Zahlen, normale Zahlen ganz egal). Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & x + y - 5z = 2 \\ \text{II} \quad & -2x + y - 2z = -4 \\ \text{III} \quad & -x + y + z = 2 \end{aligned}$$

**1. Schritt:** Ziel ist es, die 3 Gleichungen so miteinander zu addieren, dass eine Variable wegfällt und man danach 2 Gleichungen mit nur noch 2 Variablen erhält. Je nachdem welche Variable man im ersten Schritt eliminieren möchte, muss man dafür als Erstes einzelne Gleichungen mit einem Faktor (einer Zahl) multiplizieren, damit bei Addition der Gleichungen auch tatsächlich diese Variable verschwindet. Im obigen Beispiel bietet es sich an, die Variable  $x$  zu eliminieren, indem man die I + III Gleichung rechnet ( $\Rightarrow$  ergibt Gleichung IV) und danach die I Gleichung mit 2 multipliziert und anschließend mit der II Gleichung addiert (also  $2 \cdot I + II \Rightarrow$  ergibt Gleichung V):

$$\begin{array}{r}
 \text{I} \quad x + y - 5z = 2 \\
 \text{II} \quad -2x + y - 2z = -4 \\
 \text{III} \quad -x + y + z = 2 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 \text{IV: I + III} \quad x + (-x) + y + y - 5z + z = 2 + 2 \\
 \text{IV} \quad \quad \quad 2y - 4z = 4 \\
 \hline
 \text{I} \quad x + y - 5z = 2 \quad | \cdot 2 \\
 2 \cdot \text{I} \quad 2x + 2y - 10z = 4 \\
 \text{II} \quad -2x + y - 2z = -4 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 \text{V: } 2 \cdot \text{I} + \text{II} \quad 2x + (-2x) + 2y + y - 10z + (-2z) = 4 + (-4) \\
 \text{V} \quad \quad \quad 3y - 12z = 0
 \end{array}$$

**2. Schritt:** Nun hat man 2 Gleichungen (IV und V) mit nur noch 2 Variablen ( $y$  und  $z$ ). Ziel ist es, die 2 Gleichungen wieder so miteinander zu addieren, dass eine weitere Variable wegfällt und man danach 1 Gleichung mit nur noch 1 Variable erhält. Damit die Variable  $y$  in den Gleichungen IV und V bei der Addition eliminiert wird, sucht man zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren 2 und 3, welches 6 ist. Somit wird die Gleichung IV mit 3 multipliziert und die Gleichung V mit  $-2$ . **Minus** 2 deshalb, damit bei der Addition der beiden Gleichungen die  $y$ -Variable eliminiert wird:

$$\begin{array}{r}
 \text{IV} \quad 2y - 4z = 4 \quad | \cdot 3 \\
 3 \cdot \text{IV} \quad 6y - 12z = 12 \\
 \text{V} \quad 3y - 12z = 0 \quad | \cdot (-2) \\
 (-2) \cdot \text{V} \quad -6y + 24z = 0 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 3 \cdot \text{IV} + (-2) \cdot \text{V} : \quad 6y - 6y - 12z + 24z = 12 + 0 \\
 \quad \quad \quad 12z = 12 \quad | : 12 \\
 \quad \quad \quad z = 1
 \end{array}$$

**3. Schritt:** Nachdem eine Variable gelöst ist (in dem Fall  $z$ ), werden die restlichen Variablen ( $x$  und  $y$ ) durch „rückwärtseinsetzen“ in die vorherigen Gleichungen berechnet. Man kann  $z = 1$  entweder in die Gleichung IV oder V einsetzen und diese anschließend nach  $y$  auflösen. Die Variable  $x$  erhält man, indem  $z = 1$  und das berechnete  $y$  in eine der Gleichungen I, II oder III eingesetzt werden und diese anschließend nach  $x$  aufgelöst wird:

$$\begin{array}{l}
 z = 1 \text{ in V: } \quad 3y - 12z = 0 \quad | \quad z = 1 \\
 \quad \quad \quad 3y - 12 \cdot 1 = 0 \quad | \quad +12 \\
 \quad \quad \quad 3y = 12 \quad | \quad :3 \\
 \quad \quad \quad y = 4 \\
 \hline
 y = 4 \text{ und } z = 1 \text{ in I: } \quad x + y - 5z = 2 \quad | \quad y = 4 \text{ und } z = 1 \\
 \quad \quad \quad x + 4 - 5 \cdot 1 = 2 \quad | \quad +1 \\
 \quad \quad \quad x = 3
 \end{array}$$

**Hinweis:** In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für  $x$ ,  $y$  und  $z$  kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. Keine eindeutige Lösung existiert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Gleichung  $0 = 0$  herauskommt. Gar keine Lösung existiert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Ungleichung herauskommt (z.B.  $0 = 2$ ).

### 2.1.2 Gauß-Verfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 oder mehr Variablen zu lösen, bietet das Gaußsche Eliminationsverfahren eine Möglichkeit. Um das Gaußverfahren zu benutzen, wendet man die sogenannte Matrixschreibweise an und schreibt das Lineare Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Dafür betrachten wir nur die **Koeffizienten** (Zahlen) vor den Variablen im linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & x + y - 5z = 2 \qquad \qquad \qquad 1x + 1y - 5z = 2 \\
 \text{II} & -2x + y - 2z = -4 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1y - 2z = -4 \\
 \text{III} & -x + y + z = 2 \qquad \qquad \qquad -1x + 1y + 1z = 2
 \end{array}$$

und übertragen diese in die Matrix. Die Werte der rechten Seite der Gleichungen (hier 2, -4 und 2) werden auch in die Matrix, in die rechte Seite hinter dem Strich, übertragen:

$$\left( \begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & -5 & 2 \\
 -2 & 1 & -2 & -4 \\
 -1 & 1 & 1 & 2
 \end{array} \right)$$

Ziel ist es nun durch umformen und addieren von Zeilen die Matrix in folgende Form zu bekommen, sodass nur noch **1en auf der Diagonalen** stehen und ansonsten **0en**. Die Zahlen, welche dann am Ende (sobald diese Form erreicht wurde) auf der rechten Seite von dem Strich stehen, geben uns dann direkt die Lösungen für die gesuchten Variablen an. Deutlich wird das, indem man die Matrix wieder in Gleichungen umschreibt, z.B.:

$$\left( \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l}
 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3 \qquad x = 3 \\
 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 4 \Rightarrow y = 4 \\
 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \qquad z = 1
 \end{array}$$

Damit nun diese „Ziel“-Form der Matrix erreicht wird, werden nun nacheinander Additionen und Umformungen von Zeilen durchgeführt, in der Reihenfolge, dass **zuerst unterhalb der Diagonalen 0en** entstehen und **danach oberhalb der Diagonalen**. Die Reihenfolge der Stellen in der Matrix, für welche man eine 0 „schafft“, ist im Folgenden mit einem **gelben Hintergrund gekennzeichnet**:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot (-3) \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} | : 6 \\ | : 24 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 10 \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | : 10 \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | : 2 \\ | : (-2) \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

**1. Hinweis:** Um immer die „Ziel“-Form der Matrix zu erreichen, wird es in manchen Fällen nötig sein, Zeilen innerhalb der Matrix zu vertauschen. Das ist ohne weiteres möglich! Beispiel:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

**2. Hinweis:** In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für  $x$ ,  $y$  und  $z$  kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem

tem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. **Keine eindeutige Lösung** existiert dann, wenn **in einer Zeile der Matrix** (vor oder nach einem „Rechenschritt“) **nur 0en stehen**. **Gar keine Lösung** existiert dann, wenn **in einer Zeile der Matrix** (vor oder nach einem „Rechenschritt“) **auf der linken Seite des senkrechten Strichs nur 0en stehen und auf der rechten Seite eine beliebige Zahl** (denn dann liegt eine falsche Aussage vor!). Beispiel:

Keine eindeutige Lösung:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Keine Lösung:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array} \right)$$

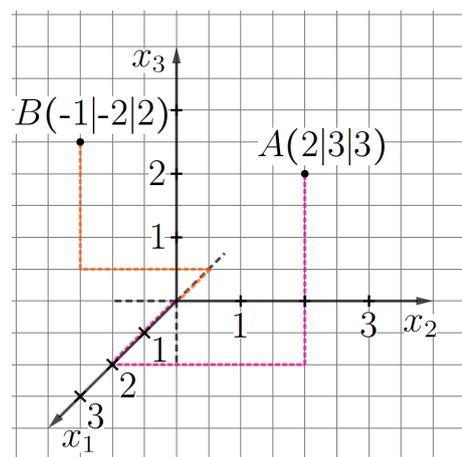
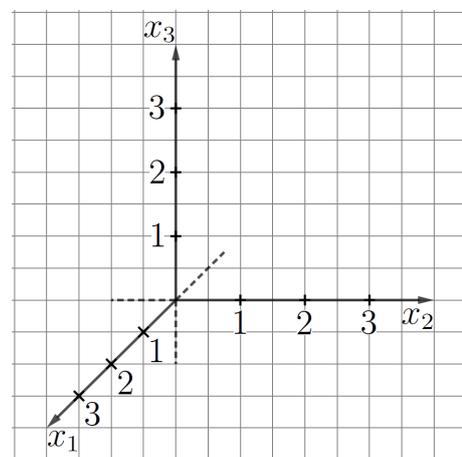
## 2.2 3D-Koordinatensystem

Um einen 3-dimensionalen Raum darstellen zu können, kommt eine 3. Achse im 3D-Koordinatensystem hinzu. Das 3D-Koordinatensystem besteht aus einer  $x_1$ -,  $x_2$ - und einer  $x_3$ -Achse. Im 2D-Koordinatensystem mit einer  $x$ - und  $y$ -Achse kann man sich nur nach oben/unten auf der  $y$ -Achse und seitwärts auf der  $x$ -Achse bewegen. Im 3D-Koordinatensystem kann man sich neben oben/unten auf der  $x_3$ -Achse und seitwärts auf der  $x_2$ -Achse auch in die Tiefe (3e-Dimension) auf der  $x_1$ -Achse bewegen.

Die Schreibweise für Punkte in diesem Koordinatensystem ist:  $P(x_1|x_2|x_3)$ . Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Vektoren **waagrecht** aufgeschrieben.

Wie man Punkte in das 3D-Koordinatensystem einzeichnet, ist am Beispiel von 2 Punkten  $A(2|3|3)$  und  $B(-1|-2|2)$  im rechten Schaubild dargestellt. Die farbigen Linien starten im Ursprung und beschreiben jeweils mithilfe der Punktkoordinaten den Weg, der zum Standort des Punktes im 3D-Koordinatensystem führt.

Beispiel Standortbestimmung Punkt  $A(2|3|3)$ : Man startet im Ursprung geht +2 Einheiten nach vorne auf der  $x_1$ -Achse, geht danach +3 Einheiten nach rechts in Richtung der  $x_2$ -Achse und schließlich +3 Einheiten nach oben in Richtung der  $x_3$ -Achse.



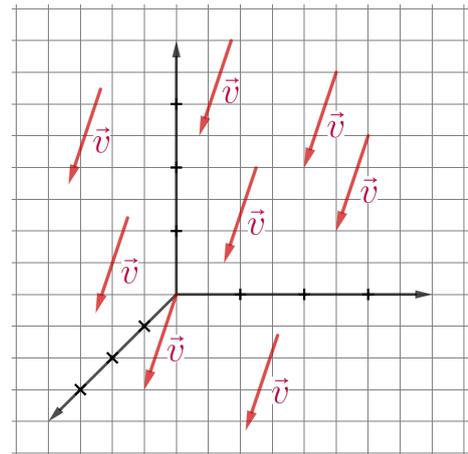
## 2.3 Vektoren

Vektoren im 3-dimensionalen Raum sind „Pfeile“, die eine bestimmte Länge und Richtung haben. Die Schreibweise für Vektoren ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Punkten **senkrecht** aufgeschrieben.

Ein Vektor ist **nur** durch seine Länge und Richtung bestimmt, er ist **nicht** ortsgebunden. Das heißt ein Vektor kann sich überall im Raum befinden. Im rechten Schaubild sind alle dargestellten Vektoren ein und derselbe Vektor  $\vec{v}$ . Sie haben alle dieselbe Länge und Richtung, sie sind nur unterschiedlich im Raum positioniert. Man kann also einen Vektor beliebig im Raum verschieben.

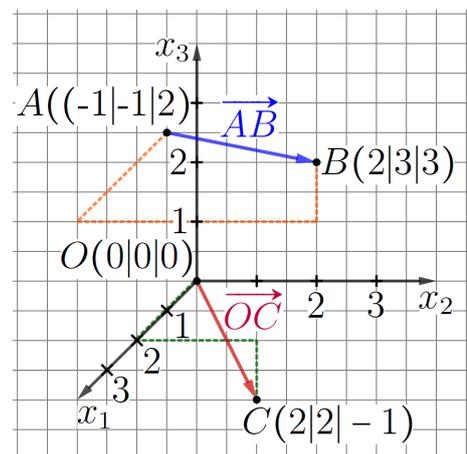


Ein Vektor der durch 2 Punkte  $A$  und  $B$  definiert ist, hat die Schreibweise  $\overrightarrow{AB}$ . Dabei zeigt die Reihenfolge der Buchstaben  $\overrightarrow{AB}$  an, von welchem Punkt zu welchem Punkt der Vektor verläuft (also die Richtung des Vektors). Bei dem Vektor  $\overrightarrow{AB}$  verläuft der Vektor vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$ , der Vektor  $\overrightarrow{BA}$  verläuft andersherum vom Punkt  $B$  zum Punkt  $A$ .

Die Berechnung eines Vektors zwischen 2 Punkten erfolgt, indem die einzelnen Koordinaten des „Endpunkts“ **Minus** die Koordinaten des „Startpunkts“ gerechnet werden. Im Beispiel im rechten Schaubild berechnet sich also der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  zwischen dem „Startpunkt“  $A(-1|-1|2)$  und dem „Endpunkt“  $B(2|3|3)$  folgendermaßen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 3 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die **orangefarbene Linie** startet im Punkt  $A$  und beschreibt mithilfe der **Vektorkoordinaten** von  $\overrightarrow{AB}$  den Weg, der zum Punkt  $B$  mithilfe des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  im 3D-Koordinatensystem führt. Der Vektor  $\overrightarrow{OC}$  ist ein sogenannter **Ortsvektor**.



Ortsvektoren sind Vektoren, deren „Startpunkt“ **immer** der Ursprung  $O(0|0|0)$  ist und der „Endpunkt“ beliebig ist. Im Beispiel ist der „Endpunkt“  $C(2|2|-1)$ . Die Vektorkoordinaten des Ortsvektors sind **immer** die Punktkoordinaten des „Endpunkts“. Siehe Berechnung des Ortsvektors  $\overrightarrow{OC}$ :

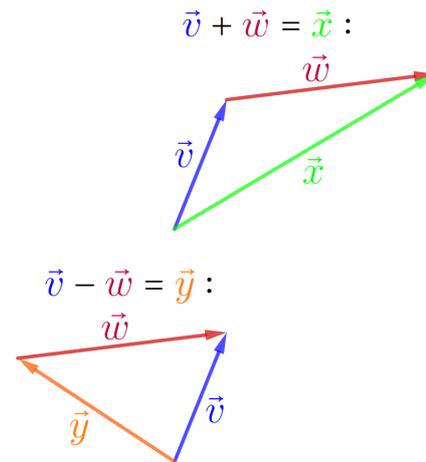
$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} c_1 - o_1 \\ c_2 - o_2 \\ c_3 - o_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 2 - 0 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 2.3.1 Rechnen mit Vektoren

Addiert oder subtrahiert man Vektoren miteinander entsteht ein neuer Vektor. Bei der Addition bzw. Subtraktion werden die einzelnen Vektorkoordinaten miteinander addiert bzw. subtrahiert. Im Beispiel im rechten Schaubild ist die Addition bzw. Subtraktion

der Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  mit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$  und deren Ergebnisvektoren  $\vec{x}$  (bei Addition) bzw.  $\vec{y}$  (bei Subtraktion) graphisch dargestellt.

Bei der Addition „reih“ man die Vektoren der Richtung entsprechend aneinander und erhält den resultierenden Ergebnisvektor. Bei der Subtraktion „reih“ man den abgezogenen Vektor entgegen seiner Richtung an (im Beispiel  $\vec{w}$ ). Die Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:



$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-2) \\ 2 + 6 \\ 5 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 2 - 6 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Multipliziert man einen Vektor mit einem Faktor (eine beliebige Zahl), so werden alle Vektorkoordinaten mit dem Faktor (der beliebigen Zahl) multipliziert. Graphisch gesehen wird der Vektor durch den Faktor verlängert oder verkürzt. Das Multiplizieren mit einem negativen Faktor verändert, neben der Verkürzung oder Verlängerung, die Richtung um  $180^\circ$ , d.h. der Vektor zeigt anschließend in die entgegengesetzte Richtung.

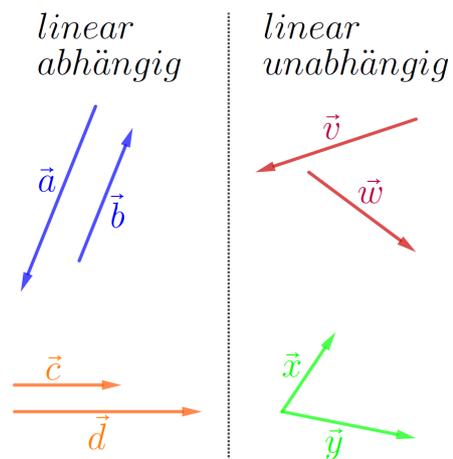
**Beispiel.**

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Lineare Abhängigkeit

2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel verlaufen. Dementsprechend sind 2 Vektoren linear unabhängig, wenn sie **nicht** parallel verlaufen.

Rechnerisch lässt sich die Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von 2 Vektoren recht einfach überprüfen. 2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind, d.h. man kann die Vektoren mit einem Faktor multiplizieren und erhält den jeweils anderen Vektor. Ist das **nicht** möglich, sind die 2 Vektoren linear unabhängig.



**Beispiel.**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ linear abhängig, da } -2 \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot -3 \\ -2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

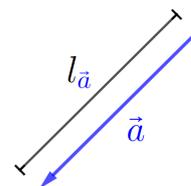
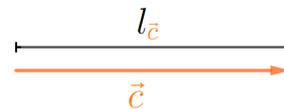
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig, da die Vektoren keine Vielfache voneinander sind}$$

### 2.3.3 Länge eines Vektors

Die Länge  $l$  eines Vektors  $\vec{v}$  wird durch Betragsstriche gekennzeichnet:  $l_{\vec{v}} = |\vec{v}|$ . Die Formel für die Berechnung der Länge eines Vektors lautet:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

*Länge eines Vektors*



**Beispiel.** Berechne die Länge des Vektors  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

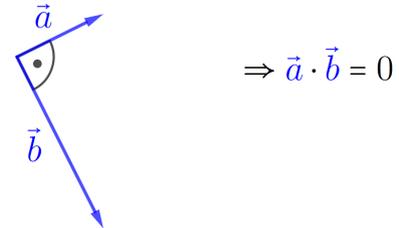
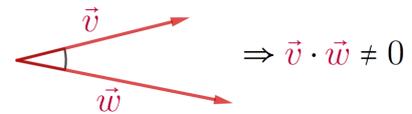
$$l_{\vec{a}} = |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

### 2.3.4 Skalarprodukt

Multipliziert man 2 Vektoren miteinander, erhält man das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. Die Rechenvorschrift lautet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

**Merke:** Ergibt das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{0}$ , so sind diese beiden Vektoren **orthogonal** zueinander, sie haben dementsprechend einen **rechten Winkel**. Überprüfung, ob ein rechter Winkel (Orthogonalität) zwischen 2 Vektoren vorliegt, somit mithilfe des Skalarprodukts!



**Beispiel.** Berechne das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sowie  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1 + 8 - 9 = 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind orthogonal!}$$

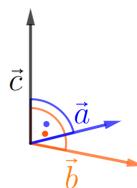
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) = 0 + 30 - 10 = 20 \neq 0$$

### 2.3.5 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt von 2 Vektoren liefert genau den Vektor, der **senkrecht/orthogonal zu beiden** Vektoren ist. D.h. sind 2 Vektoren gegeben und man sucht den Vektor, der orthogonal zu beiden Vektoren ist, kann man das Kreuzprodukt anwenden. Die Rechenvorschrift lautet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



*Schema für die Rechenvorschrift*

$a_1$	+	$b_2$	-	$a_3 b_1 - a_1 b_3$
$a_2$	-	$b_3$	+	$a_2 b_3 - a_3 b_2$
$a_3$	+	$b_1$	-	$a_1 b_2 - a_2 b_1$

**Beispiel.** Gesucht ist der Vektor, der orthogonal zu den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 6 \\ 3 + 3 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Vereinfache: } \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Man vereinfacht am Ende den Vektor und multipliziert ihn deshalb mit  $\frac{1}{2}$ , da mit kleineren Vektorkoordinaten einfacher zu rechnen ist und der „halbierte“ Vektor immernoch dieselbe Richtung besitzt (da linear abhängig!), weshalb er immernoch orthogonal zu den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

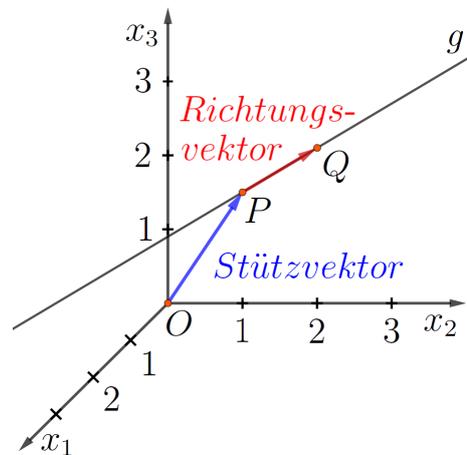
**Probe mithilfe des Skalarprodukts:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -9 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -9 + 12 - 3 = 0 \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -9 + 2 \cdot 3 + -3 \cdot (-1) = -9 + 6 + 3 = 0 \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

## 2.4 Gerade

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Gerade  $g$  in der sogenannten Parameterform aufgestellt. Hierfür bedarf es zunächst einen **Stützvektor**, der die Gerade  $g$  vom Ursprung  $O$  aus „stützt/fixiert“. Dieser **Stützvektor** ist ein Ortsvektor vom Ursprung  $O$  zu einem gegebenen Punkt auf der Geraden  $g$  (Im Beispiel rechts ist der **Stützvektor** der Vektor  $\vec{OP}$ ). Da die Gerade  $g$  nun durch den **Stützvektor** fest an einen Punkt im Raum (im Beispiel ist es der Punkt  $P$ ) „fixiert“ ist, bedarf es nun noch einer Vorgabe der Richtung, der die Gerade  $g$  folgt. Diese Richtung wird durch den **Richtungsvektor** vorgegeben, der durch zwei gegebene Punkte auf der Geraden  $g$  bestimmt wird (im Beispiel rechts ist der **Richtungsvektor** der Vektor  $\vec{PQ}$ ). Allgemeine Parameterform einer Geraden  $g$ :



$$g: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$\vec{x}$  beschreibt alle Punkte, die auf der Geraden  $g$  liegen. Für den Parameter  $t$ , kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden. Je nachdem was für eine Zahl für den Parameter  $t$  eingesetzt wird, wird der **Richtungsvektor** um diesen Faktor verlängert, verkürzt oder

auch um  $180^\circ$  in die entgegengesetzte Richtung gedreht (bei negativem Faktor) und man landet dementsprechend in einem anderen Punkt auf der Geraden  $g$ .

**Beispiel.** Stellen Sie die Gerade  $g$  auf, die durch die beiden Punkte  $P(1|2|2)$  und  $Q(-2|1|1)$  verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Geraden aus, der den **Stützvektor** bildet:

Wir wählen  $P(1|2|2) \Rightarrow$  **Stützvektor:**  $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den **Richtungsvektor** von  $g$  mithilfe zweier gegebener Punkte auf der Geraden ( $P$  und  $Q$ ):

**Richtungsvektor:**  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Aufstellen der Gerade  $g$  in Parameterform:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 2.4.1 Geometrische Punktprobe bei Geraden

Ob ein Punkt  $P$  auf einer Geraden  $g$  liegt, wird durch die (geometrische) Punktprobe bestimmt. Dafür setzt man die Koordinaten des Punktes  $P$  in  $\vec{x}$  der Geradengleichung von  $g$  ein. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so **liegt** der Punkt  $P$  **auf** der Geraden  $g$ , andernfalls liegt der Punkt  $P$  **NICHT** auf der Geraden  $g$ .

**Beispiel.** Liegt der Punkt  $P(-1|1|4)$  auf der Geraden  $g: \vec{x} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

1. Einsetzen des Punktes  $P(-1|1|4)$  in  $\vec{x}$  der Geradengleichung von  $g$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 = -9 + 2t \quad | +9 \\ 1 = -3 + t \quad | +3 \\ 4 = -4 + 2t \quad | +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 2t \quad | :2 \quad 4 = t \\ \Rightarrow 4 = t \quad \Rightarrow 4 = t \quad \Rightarrow \text{Der Punkt } P \text{ liegt auf der Geraden } g! \\ 8 = 2t \quad | :2 \quad 4 = t \end{array}$$

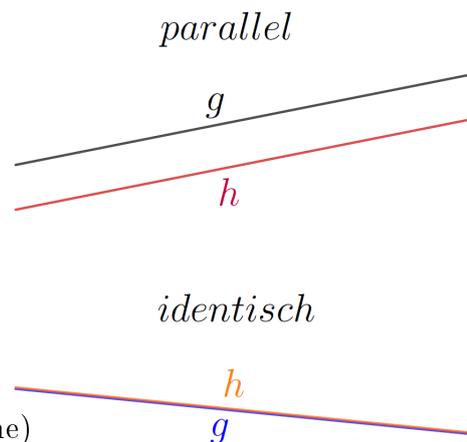
## 2.4.2 Lage von 2 Geraden

**Parallel:** 2 Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. wenn die beiden Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind.

**Beispiel.**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind parallel, da:

$$-2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Richtungsvektoren sind Vielfache})$$



**Identisch:** 2 Geraden sind identisch, wenn sie parallel sind und durch die gleichen Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden parallel sind, überprüft man ob sie identisch sind, indem man den Stützvektor einer der beiden Geraden mit der anderen Geraden gleichsetzt (in die andere Gerade einsetzt). Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit nur einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so sind die Geraden identisch, andernfalls sind die 2 Geraden parallel, jedoch nicht identisch.

**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

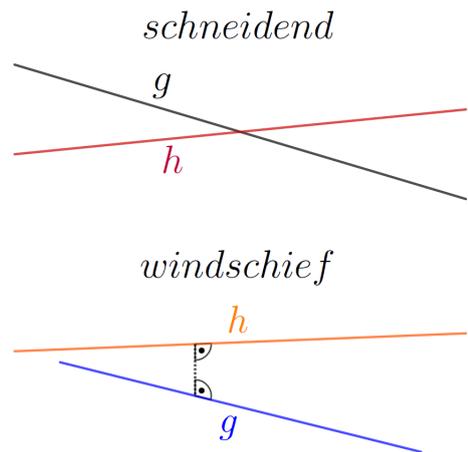
$\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind Vielfache (linear abhängig). Somit sind die beiden Geraden  $g$  und  $h$  parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob sie identisch sind oder nicht.

2. Gleichsetzen des Stützvektors der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -1 & = & -9 + 4s \quad | +9 \\ 1 & = & -3 + 2s \quad | +3 \\ 4 & = & -4 + 4s \quad | +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 4s \quad | :4 \quad 2 = s \\ \Rightarrow 4 & = & 2s \quad | :2 \quad 2 = s \\ 8 & = & 4s \quad | :4 \quad 2 = s \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind } \mathbf{identisch!}$$

**Schneidend:** 2 Geraden schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind und sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt schneiden. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden nicht parallel sind, überprüft man ob sie sich schneiden, indem man die beiden Geraden gleichsetzt. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 2 Parametern. Mithilfe der 1. und 2. Gleichung bestimmt man die Lösungen der beiden Parameter. Setzt man anschließend die Lösungen der 2 Parameter in die 3. Gleichung ein und die Gleichung ist „wahr/stimmt“, so schneiden sich die Geraden in einem Schnittpunkt, andernfalls sind die 2 Geraden **windschief**. Die Berechnung des Schnittpunkts der beiden Geraden erfolgt durch Einsetzen der berechneten Lösung eines Parameters in die zugehörige Geradengleichung. Durch anschließendes Auflösen erhält man die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts.



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$  und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 + 3t = 3 + 1s \quad | -s \\ 1 + 4t = 9 + 0s \\ 2 + 1t = 1 + 1s \quad | -s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \\ 1 + 4t = 9 \quad | -1 \\ 2 + t - s = 1 \quad | -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \\ 4t = 8 \quad | :4 \\ t - s = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \quad | t = 2 \text{ einsetzen} \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - s = 3 \quad | -6 \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -s = -3 \quad | \cdot (-1) \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 3 \\ t = 2 \\ t - s = -1 \quad | t = 2 \text{ und } s = 3 \text{ einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad s &= 3 \\ t &= 2 && \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ schneiden sich!} \\ 2 - 3 &= -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Berechnen des Schnittpunkts durch Einsetzen von  $t = 2$  in die Gerade  $g$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 3 \\ 1 + 2 \cdot 4 \\ 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gemeinsamer Schnittpunkt } S(6|9|4)$$

**Windschief:** 2 Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden. D.h. es gibt immer einen Abstand zwischen den beiden Geraden (z.B. verläuft die eine Gerade „höher“ als die andere, weshalb sie sich nicht schneiden). Der Nachweis erfolgt nach dem gleichen Schema, nach dem man prüft, ob sie sich schneiden. Der Unterschied ist, dass beim Einsetzen der berechneten 2 Parameter in die 3. Gleichung, die 3. Gleichung „unwahr/nicht korrekt“ ist.

**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$  und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 4 + 2t & = & 0 + 1s \quad | -s \\ -1 + 7t & = & -2 - 3s \quad | +3s \\ 2 + 1t & = & 3 + 3s \quad | -3s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 4 + 2t - s & = & 0 \quad | -4 \\ -1 + 7t + 3s & = & -2 \quad | +1 \\ 2 + t - 3s & = & 3 \quad | -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2t - s & = & -4 \quad | -2t \\ 7t + 3s & = & -1 \\ t - s & = & 1 \end{array}$$

(Wir wenden hier das Einsetzungsverfahren bei der 1. und 2. Gleichung an, um  $s$  und  $t$  zu berechnen)

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} -s & = & -4 - 2t \quad | \cdot (-1) \\ 7t + 3s & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 3s & = & -1 \quad | s = 4 + 2t \text{ einsetzen} \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 3(4 + 2t) & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 12 + 6t & = & -1 \quad | -12 \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 13t & = & -13 \quad | :13 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \quad | t = -1 \text{ einsetzen} \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2 \cdot (-1) \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \quad | t = -1 \text{ und } s = 2 \text{ einsetzen} \end{array}$$

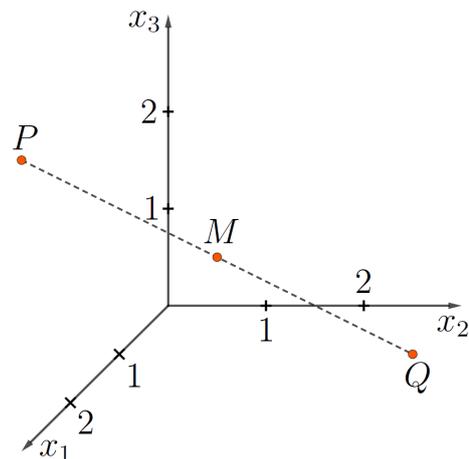
$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \end{array} \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind } \mathbf{windschief!}$$

$$-1 - 3 \cdot 2 \neq 1$$

## 2.5 Mittelpunkt einer Strecke

Die Koordinaten des Mittelpunkts  $M$  einer Strecke zwischen 2 Punkten  $P(p_1|p_2|p_3)$  und  $Q(q_1|q_2|q_3)$  berechnen sich folgendermaßen:

$$M \left( \frac{p_1 + q_1}{2} \mid \frac{p_2 + q_2}{2} \mid \frac{p_3 + q_3}{2} \right)$$



**Beispiel.** Gesucht ist der Mittelpunkt  $M$  der beiden Punkte  $P(1|-1|2)$  und  $Q(-3|1|-2)$ :

$$M \left( \frac{1 + (-3)}{2} \mid \frac{-1 + 1}{2} \mid \frac{2 + (-2)}{2} \right)$$

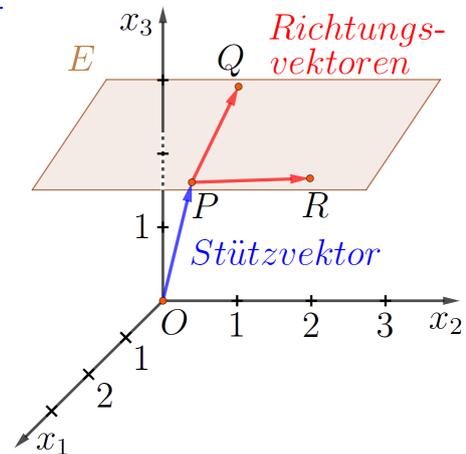
$\Rightarrow M(-1|0|0)$  ist der gesuchte Mittelpunkt

## 2.6 Ebene

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Ebene  $E$  entweder in der Parameterform, Koordinatenform oder Normalenform aufgestellt.

### 2.6.1 Parameterform

Für die Parameterform bedarf es zunächst einen **Stützvektor**, der die Ebene  $E$  vom Ursprung  $O$  aus „stützt/fixiert“. Dieser **Stützvektor** ist ein Ortsvektor vom Ursprung  $O$  zu einem gegebenen Punkt auf der Ebene  $E$  (Im Beispiel rechts ist der **Stützvektor** der Vektor  $\overrightarrow{OP}$ ). Für das weitere Verständnis der Definition der Parameterform einer Ebene stelle man sich vor, die Aufgabe ist es eine Platte (Ebene  $E$ ) fest mitten in einem Raum zu platzieren. Bisher liegt die Platte nur auf einem im Boden fest verankerten „Stab“ (dem **Stützvektor**) auf, weshalb sie noch sehr instabil ist und in alle Richtungen kippen kann. Eine erste Stütze/Fixierung wird durch das Anbringen einer Stange am Ende des Stabes geschaffen (dem **1. Richtungsvektor**, im Beispiel rechts  $\overrightarrow{PQ}$ ). Nun kann die Platte nur noch um die Achse der Stange seitlich wegkippen. Damit die Platte also fest im Raum fixiert ist, benötigen wir noch eine weitere Stange auf der die Platte aufliegt (dem **2. Richtungsvektor**, im Beispiel rechts  $\overrightarrow{PR}$ ). Wichtig ist, dass die beiden **Richtungsvektoren** linear unabhängig sind. Allgemeine Parameterform einer Ebene  $E$ :



$$E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{s}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{u}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$\vec{x}$  beschreibt alle Punkte, die auf der Ebene  $E$  liegen. Für die Parameter  $s$  und  $t$ , kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden.

**Beispiel.** Stellen Sie die Ebene  $E$  in Parameterform auf, die durch die Punkte  $P(2|-1|1)$ ,  $Q(1|0|3)$  und  $R(0|2|-1)$  verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Ebene aus, der den **Stützvektor** bildet:

$$\text{Wir wählen } P(2|-1|1) \Rightarrow \text{Stützvektor: } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die beiden **Richtungsvektoren** von  $E$  mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene ( $P$ ,  $Q$  und  $R$ ):

$$\text{1. Richtungsvektor: } \vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. **Richtungsvektor:**  $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - (-1) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

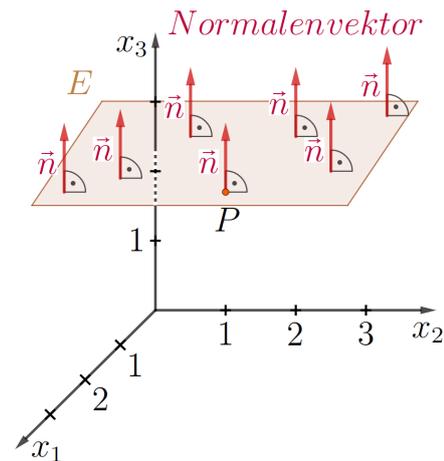
3. Aufstellen der Ebene  $E$  in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

### 2.6.2 Koordinatenform

Für die Koordinatenform bedarf es einen Punkt  $P$  auf der Ebene  $E$  und den sogenannten **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der Ebene  $E$ . Der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  hat die Eigenschaft, dass er orthogonal (im rechten Winkel) auf der Ebene  $E$  steht. Muss der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  berechnet werden, erfolgt dies durch das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{u}$  aus der Parameterform:

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \vec{n}$$



Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene  $E$  ist:

$$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$$

Das  $b$  berechnet man, indem in die Gleichung für  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die Punktkoordinaten des Punktes  $P$  eingesetzt werden. Ergebnis ist das  $b$ . Alle Punkte deren Koordinaten  $(x_1|x_2|x_3)$  die Gleichung erfüllen, definieren die Ebene  $E$  (liegen drauf).

**Beispiel.** Stellen Sie die Ebene  $E$  in Koordinatenform auf, die durch die Punkte  $P(2|-1|1)$ ,  $Q(1|0|3)$  und  $R(0|2|-1)$  verläuft.

1. Berechne 2 Richtungsvektoren von  $E$  mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene ( $P$ ,  $Q$  und  $R$ ) um den **Normalenvektor**  $\vec{n}$  bestimmen zu können:

1. Richtungsvektor:  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 0 - (-1) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor:  $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - (-1) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den **Normalenvektor**  $\vec{n}$  mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{u}$ :

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ -4 - 2 \\ -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Vereinfache: } -1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

3. Berechne das **b** für die Koordinatenform mit einem Punkt der Ebene  $E$  und dem **Normalenvektor**  $\vec{n}$ :

Wir setzen  $P(2|-1|1)$  in die Gleichung ein:  $8 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 11 = b$

4. Aufstellen der Ebene  $E$  in Koordinatenform:

$$E: 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 11$$

### 2.6.3 Normalenform

Für die Koordinatenform bedarf es einen Punkt  $P(p_1|p_2|p_3)$  auf der Ebene  $E$  und den sogenannten **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der Ebene  $E$ . Die Berechnung des **Normalenvektors**  $\vec{n}$  erfolgt nach derselben Vorgehensweise wie bei der Koordinatenform. Die allgemeine Normalenform einer Ebene  $E$  ist:

$$E: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Alle Punkte deren Koordinaten  $(x_1|x_2|x_3)$  die Gleichung erfüllen, definieren die Ebene  $E$  (liegen drauf).

**Beispiel.** Schreiben Sie die Ebene  $E: 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -6$  in Normalenform auf.

1. Ablesen des **Normalenvektors**  $\vec{n}$  aus der Koordinatenform:

$$E: 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -6 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Suche einen Punkt  $P$  auf der Ebene  $E$  mithilfe der Koordinatenform. Auf der rechten Seite der Gleichung muss -6 rauskommen. Überlege für welche Koordinaten man eine 0 einsetzt und für welche Koordinate eine Zahl, damit man einen möglichst „einfachen“ Punkt findet, für den -6 rauskommt. Setze  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$ :

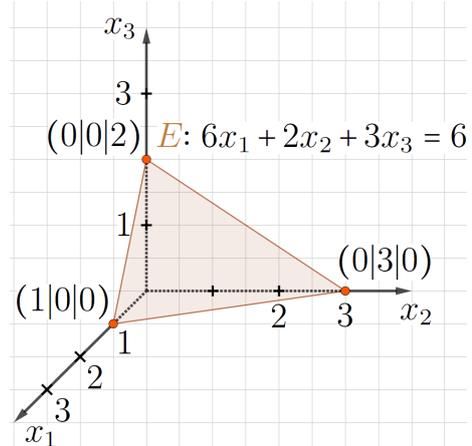
$$E: 3 \cdot (-2) - 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = -6 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \text{Der Punkt } P(-2|0|0) \text{ liegt auf } E$$

3. Aufstellen der Ebene  $E$  in Normalenform:

$$E: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

## 2.6.4 Ebene in Koordinatensystem einzeichnen

Um eine Ebene  $E$  in ein 3D-Koordinatensystem einzeichnen zu können, bringt man diese zunächst in Koordinatenform. Aus der Koordinatenform lassen sich die sogenannten **Spurpunkte**, (das sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen) berechnen. Um den Spurpunkt auf der jeweiligen Koordinatenachse ( $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse) zu bestimmen, setzt man in der Koordinatenform jeweils für die anderen beiden Koordinaten 0 ein und errechnet die Zahl, bei der die Ebene die jeweilige Koordinatenachse schneidet. Am Ende zeichnet man die Spurpunkte in das Koordinatensystem ein, verbindet diese miteinander und erhält die Ebene.



**Beispiel.** Zeichnen Sie die Ebene  $E: 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$  in ein Koordinatensystem.

1. Bestimmen der Spurpunkte auf der  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse:

Spurpunkt auf der  $x_1$ -Achse: Setze in der Koordinatenform  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  und berechne  $x_1$ :

$$6x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6 \quad | :6 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \quad \Rightarrow 1. \text{ Spurpunkt } (1|0|0)$$

Spurpunkt auf der  $x_2$ -Achse: Setze in der Koordinatenform  $x_1 = 0$  und  $x_3 = 0$  und berechne  $x_2$ :

$$6 \cdot 0 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 6 \quad | :2 \quad \Rightarrow x_2 = 3 \quad \Rightarrow 2. \text{ Spurpunkt } (0|3|0)$$

Spurpunkt auf der  $x_3$ -Achse: Setze in der Koordinatenform  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  und berechne  $x_3$ :

$$6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3x_3 = 6 \quad | :3 \quad \Rightarrow x_3 = 2 \quad \Rightarrow 3. \text{ Spurpunkt } (0|0|2)$$

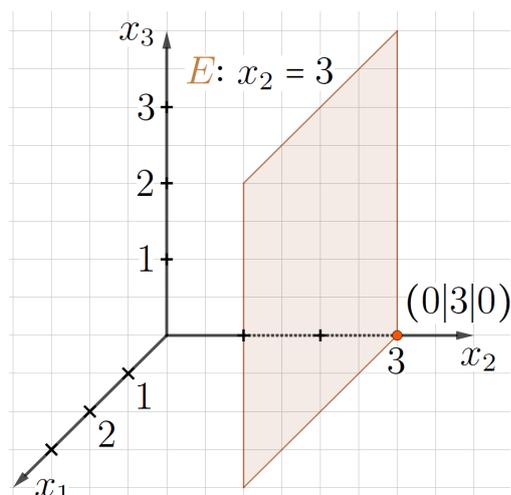
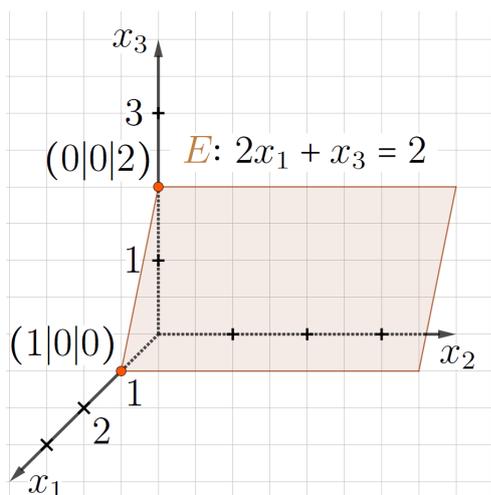
2. Trage die 3 Spurpunkte in das Koordinatensystem ein und verbinde diese miteinander (siehe Abbildung oben).

Nicht jede Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen. Beispielsweise können Ebenen auch parallel zu einer oder zwei der Koordinatenachsen verlaufen. Man erkennt diese Ebenen daran, dass in der Koordinatenform ein oder zwei der Koordinaten ( $x_1$ ,  $x_2$  oder  $x_3$ ) „fehlen“. Zu diesen „fehlenden“ Koordinatenachsen verläuft die Ebene parallel.

Dementsprechend erhält man bei der Berechnung der Spurpunkte nur zwei Lösungen (Ebene verläuft parallel zu **einer Koordinatenachse**) oder nur eine einzige Lösung (Ebene verläuft parallel zu **zwei Koordinatenachsen**). Beim Zeichnen solcher Ebenen geht man folgendermaßen vor.

Im Falle, dass die Ebene parallel zu **einer Koordinatenachse** verläuft, verbindet man die beiden berechneten Spurpunkte auf den anderen beiden Koordinatenachsen miteinander und zeichnet von beiden Spurpunkten aus jeweils eine Linie, die parallel zu der „fehlenden“ Koordinatenachse ist. Die Enden der beiden gleichlangen Linien verbindet man schließlich miteinander und erhält die Ebene als Parallelogramm (siehe linke untere Abbildung).

Im Falle, dass die Ebene parallel zu **zwei Koordinatenachsen** verläuft, zeichnet man von dem einzigen berechneten Spurpunkt zwei Linien, die jeweils parallel zu einer der beiden „fehlenden“ Koordinatenachsen sind. Diese beiden Linien werden schließlich zu einem Parallelogramm ergänzt, das die Ebene darstellt (siehe rechte untere Abbildung).



### 2.6.5 Lage von 2 Ebenen

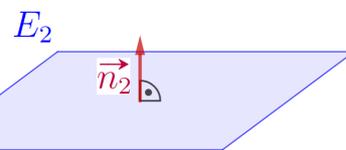
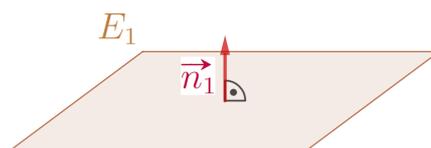
**Hinweis:** Um die Lage von 2 Ebenen rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die beiden Ebenen zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

**Parallel:** 2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind parallel, wenn ihre **Normalenvektoren**  $n_1$  und  $n_2$  Vielfache voneinander sind, d.h. die beiden **Normalenvektoren** der Ebenen sind linear abhängig.

**Beispiel.**  $E_1 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$  und  $E_2 : 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 4$  sind parallel, da:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ (Normalenvektoren sind Vielfache)}$$

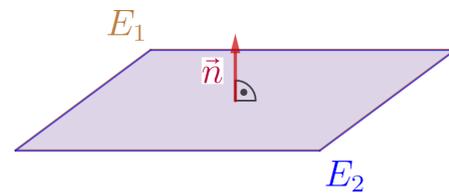
parallel



### Identisch:

2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind identisch, wenn sie parallel sind und durch dieselben Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Ebenen parallel sind, überprüft man ob sie identisch sind, indem die beiden Ebenengleichungen per Additionsverfahren miteinander verrechnet werden. Da die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind, sind nach dem 1. Schritt des Additionsverfahrens alle Variablen ( $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ ) eliminiert. Ist die nach dem 1. Schritt „entstandene“ Gleichung „wahr“, so sind die beiden Ebenen identisch, andernfalls sind die 2 Ebenen parallel, jedoch nicht identisch.

*identisch*



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E_1 : 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5 \text{ und } E_2 : -8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -10?$$

1. Untersuche ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

⇒ Normalenvektoren sind Vielfache (linear abhängig). Also sind  $E_1$  und  $E_2$  parallel.

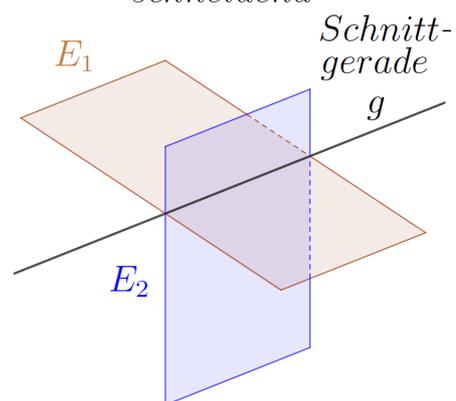
2. Schreibe die beiden Ebenengleichungen übereinander und wende den 1. Schritt des Additionsverfahrens an (Eliminiere die Variable  $x_1$ ):

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 4x_1 \quad - \quad 2x_2 \quad - \quad 3x_3 \quad = \quad 5 \quad | \cdot 2 \\ \text{II} \quad -8x_1 \quad + \quad 4x_2 \quad + \quad 6x_3 \quad = \quad -10 \quad \leftarrow + \\ \hline \text{III: } 2 \cdot \text{I} + \text{II} \quad 2 \cdot 4x_1 - 8x_1 + 2 \cdot (-2x_2) + 4x_2 + 2 \cdot (-3x_3) + 6x_3 = 2 \cdot 5 - 10 \\ \text{III} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 = 0 \end{array}$$

⇒ Die Gleichung III:  $0 = 0$  ist „wahr“, somit sind die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  **identisch!**

**Schneidend:** 2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  schneiden sich immer in einer Schnittgerade  $g$ , wenn sie **nicht parallel** sind. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Ebenen nicht parallel sind, kann man die Schnittgerade  $g$  berechnen, indem die beiden Ebenengleichungen per Additionsverfahren miteinander verrechnet werden. Nach dem 1. Schritt des Additionsverfahrens erhält man eine Gleichung mit 2 Variablen. Für eine dieser beiden Variablen setzt man einen Parameter  $t$  ein (wenn möglich  $x_3 = t$ ). Anschließend berechnet man die anderen beiden Variablen in Abhängigkeit dieses Parameters  $t$  und kann schließlich die Schnittgerade in Parameterform aufstellen. Siehe dazu folgendes Beispiel.

*schneidend*



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Ebenen  
 $E_1: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7$  und  $E_2: -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ ?

1. Untersuche ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Normalenvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Schreibe die beiden Ebenengleichungen übereinander und wende den 1. Schritt des Additionsverfahrens an (Eliminiere die Variable  $x_1$ ):

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ \text{II} \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad | \cdot 2 \leftarrow + \\ \hline \text{III: I} + 2 \cdot \text{II} \quad 2x_1 + 2 \cdot (-x_1) + 3x_2 + 2 \cdot (-x_2) - 4x_3 + 2 \cdot 3x_3 = 7 + 2 \cdot (-2) \\ \text{III} \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

3. Setze  $x_3 = t$  und berechne damit  $x_2$  und  $x_1$  in Abhängigkeit von  $t$ :  
 $\Rightarrow x_3 = t$

Setze  $x_3 = t$  in Gleichung III ein und berechne  $x_2$  in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\begin{array}{l} \text{III} \quad x_2 + 2x_3 = 3 \quad | \quad x_3 = t \\ \quad \quad x_2 + 2t = 3 \quad | \quad -2t \\ \quad \quad x_2 = 3 - 2t \end{array}$$

Setze  $x_3 = t$  und  $x_2 = 3 - 2t$  in Gleichung I oder II ein und berechne  $x_1$  in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\begin{array}{l} \text{II} \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad | \quad x_3 = t \text{ und } x_2 = 3 - 2t \\ \quad -x_1 - (3 - 2t) + 3t = -2 \\ \quad -x_1 - 3 + 2t + 3t = -2 \quad | \quad +3 \\ \quad \quad -x_1 + 5t = 1 \quad | \quad -5t \\ \quad \quad \quad -x_1 = 1 - 5t \quad | \quad \cdot (-1) \\ \quad \quad \quad x_1 = -1 + 5t \end{array}$$

4. Aufstellen der Schnittgerade  $g$  in Parameterform mithilfe der berechneten Variablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  in Abhängigkeit von  $t$ . Die „alleinstehende“ Zahl „ohne“  $t$  gibt die jeweilige Koordinate des **Stützvektors** an, während die Zahl vor  $t$  die jeweilige Koordinate des **Richtungsvektors** angibt. Mit diesen beiden Vektoren stellt man die Parameterform der Schnittgerade  $g$  schließlich auf:

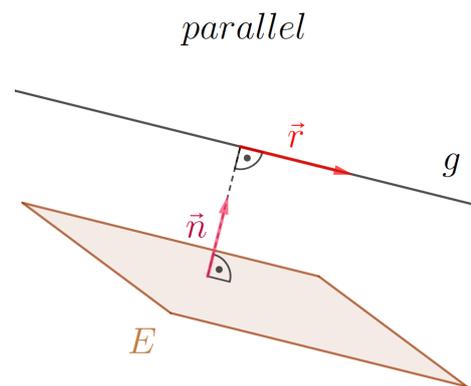
$$\begin{array}{l} x_1 = -1 + 5t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = 0 + 1t \end{array}$$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Schnittgerade von } E_1 \text{ mit } E_2.$$

## 2.7 Lage von Gerade und Ebene

**Hinweis:** Um die Lage zwischen einer Geraden und Ebene rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die Ebene zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

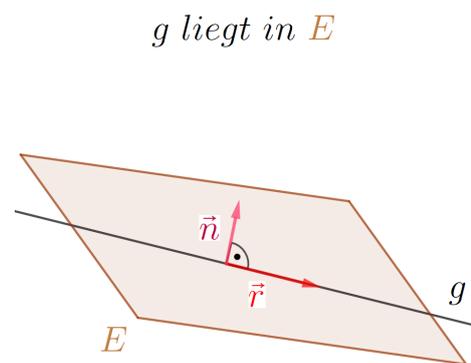
**Parallel:** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  sind parallel, wenn der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  im rechten Winkel (orthogonal) zu dem **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  der Gerade  $g$  verläuft. Rechnerisch lässt sich das mit dem Skalarprodukt bestimmen. Wenn also das Skalarprodukt des **Normalenvektors**  $\vec{n}$  mit dem **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  **NULL** ergibt, so verlaufen  $E$  und  $g$  parallel zueinander:  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \mathbf{0}$ .



**Beispiel.**  $E : 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$  und  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  sind parallel, da:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = -2 + 8 - 6 = \mathbf{0} \quad (\vec{n} \text{ und } \vec{r} \text{ sind orthogonal})$$

**$g$  liegt in  $E$ :** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  sind identisch, wenn sie parallel sind und durch dieselben Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade parallel sind, überprüft man ob  $g$  in  $E$  liegt, indem der Stützvektor der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung eingesetzt wird. Ist die Ebenengleichung nach Einsetzen des Stützvektors „wahr“, so liegt  $g$  in  $E$ , andernfalls sind sie parallel.



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der

Geraden  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  und der Ebene  $E : 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$ ?

1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = 12 + 4 - 16 = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$  Die Ebene  $E$  und die Gerade  $g$  sind parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob  $g$  in  $E$  liegt oder nicht.

2. Einsetzen des Stützvektors der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung von  $E$ :

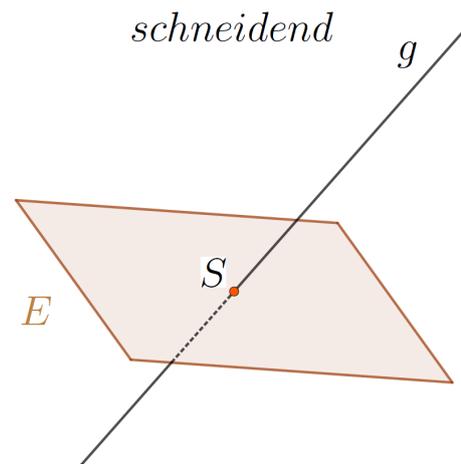
$$3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 8$$

$$-6 + 12 + 2 = 8$$

$$8 = 8$$

$\Rightarrow$  Die Gleichung  $8 = 8$  ist „wahr“, somit **liegt  $g$  in  $E$ !**

**Schneidend:** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  schneiden sich **immer** in einem Schnittpunkt  $S$ , wenn sie **nicht parallel** sind. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade nicht parallel sind, kann man den gemeinsamen Schnittpunkt  $S$  berechnen, indem man die Gerade  $g$  in die Ebenengleichung einsetzt und diese nach dem Parameter der Geradengleichung auflöst. Setzt man den berechneten Parameterwert anschließend in die Geradengleichung ein, erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes  $S$ .



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der

Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  und der Ebene  $E: 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ ?

1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -15 - 1 - 8 = -24 \neq 0$$

$\Rightarrow$  Die Ebene  $E$  und die Gerade  $g$  sind somit **nicht parallel**.

2. Einsetzen der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung von  $E$ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 8 - 3t \\ x_2 = -9 + t \\ x_3 = 0 - 4t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g \text{ in } E: 5(8 - 3t) - (-9 + t) + 2(-4t) = 1 \\ 40 - 15t + 9 - t - 8t = 1 \\ 49 - 24t = 1 \quad | -49 \\ -24t = -48 \quad | : (-24) \\ t = 2 \end{array}$$

3. Einsetzen des Parameters  $t = 2$  in die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt der Ebene  $E$  und der Geraden  $g$  hat die Koordinaten  $S(2 | -7 | -8)$ .

## 2.8 Abstand

Um die Abstände zwischen verschiedenen geometrischen Objekten zu berechnen, sind im Folgenden einige Schemata aufgelistet. Bei Ebenen ist es wieder am einfachsten man bringt diese zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

### 2.8.1 Punkt Punkt

Das Schema zur Berechnung des Abstands zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  ist folgendes:

1. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $A$  und  $B$  auf:  $\overrightarrow{AB}$
2. Bestimme die Länge des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ :  $|\overrightarrow{AB}|$
3. Die Länge des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  ist der Abstand zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ :  $d = |\overrightarrow{AB}|$

**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen den Punkten  $A(1|-3|9)$  und  $B(4|-2|5)$ ?

1. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $A$  und  $B$  auf:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-3) \\ 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

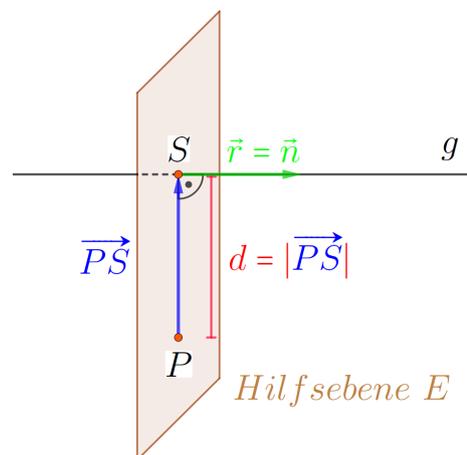
2. Bestimme die Länge des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  und damit den Abstand  $d$  zwischen  $A$  und  $B$ :

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26} \approx 5,099$$

### 2.8.2 Punkt Gerade

Der **Abstand**  $d$  zwischen einem Punkt  $P$  und einer Geraden  $g$  ist die Länge der **kürzesten Strecke** zwischen dem Punkt und der Geraden. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist folgendes:

1. Stelle eine **Hilfsebene**  $E$  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  der Geraden  $g$  als **Normalenvektor**  $\vec{n}$  hat
2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der **Hilfsebene**  $E$  mit der Geraden  $g$
3. Stelle den Vektor  $\overrightarrow{PS}$  auf
4. Bestimme die Länge des Vektors  $\overrightarrow{PS}$ :  $|\overrightarrow{PS}|$
5. Die Länge des Vektors  $\overrightarrow{PS}$  ist der **Abstand**  $d$  zwischen dem Punkt  $P$  und der Geraden  $g$ :  $d = |\overrightarrow{PS}|$



**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt  $P(3|1|8)$  und der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

1. Stelle eine Hilfsebene  $E$  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den Richtungsvektor der Geraden  $g$  als Normalenvektor hat:

$$E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = b \Rightarrow b = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = -9 + 4 + 8 = 3 \\ \Rightarrow E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \quad (\text{Das } b \text{ wird durch Einsetzen von } P \text{ in } E \text{ bestimmt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsebene  $E$  mit der Geraden  $g$ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 3t \\ x_2 = 5 + 4t \\ x_3 = 6 + t \end{array}$$

$$g \text{ in } E: -3(-1 - 3t) + 4(5 + 4t) + (6 + t) = 3 \\ 3 + 9t + 20 + 16t + 6 + t = 3 \\ 29 + 26t = 3 \quad | -29 \\ 26t = -26 \quad | :26 \\ t = -1$$

$$t = -1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt der Hilfsebene  $E$  und der Geraden  $g$  hat die Koordinaten  $S(2|1|5)$ .

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $P$  und  $S$  auf:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 1 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme die Länge des Vektors  $\overrightarrow{PS}$  und damit den Abstand  $d$  zwischen  $P$  und  $g$ :

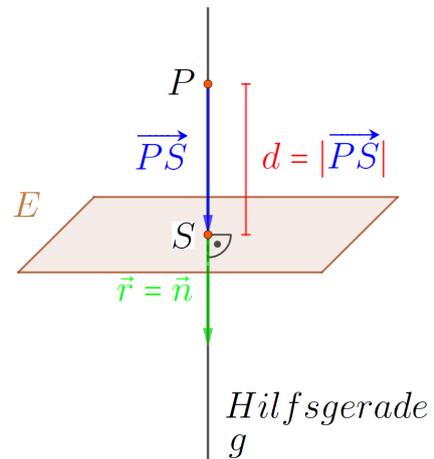
$$d = |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$$

$\Rightarrow$  Der Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Geraden  $g$  beträgt  $\sqrt{10} \approx 3,1622$ .

### 2.8.3 Punkt Ebene

Der **Abstand**  $d$  zwischen einem Punkt  $P$  und einer **Ebene**  $E$  ist die Länge der **kürzesten Strecke** zwischen dem Punkt und der **Ebene**. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist folgendes:

1. Stelle eine Hilfsgerade  $g$  in Parameterform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der **Ebene**  $E$  als **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  hat
2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsgeraden  $g$  mit der **Ebene**  $E$
3. Stelle den Vektor  $\vec{PS}$  auf
4. Bestimme die Länge des Vektors  $\vec{PS}$ :  $|\vec{PS}|$
5. Die Länge des Vektors  $\vec{PS}$  ist der **Abstand**  $d$  zwischen dem Punkt  $P$  und der **Ebene**  $E$ :  $d = |\vec{PS}|$



**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt  $P(5|1|-7)$  und der Ebene  $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$ ?

1. Stelle eine Hilfsgerade  $g$  auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den Normalenvektor der Ebene  $E$  als Richtungsvektor hat:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (P \text{ wird als Stützvektor von } g \text{ eingesetzt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsgeraden  $E$  mit der Ebene  $E$ :

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: -7(5 - 7t) + 0(1 + 0t) + 2(-7 + 2t) &= 4 \\ -35 + 49t + 0 - 14 + 4t &= 4 \\ -49 + 53t &= 4 \quad | +49 \\ 53t &= 53 \quad | :53 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt:  $S(-2|1|-5)$ .

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $P$  und  $S$  auf:

$$\vec{PS} = \begin{pmatrix} -2 - 5 \\ 1 - 1 \\ -5 - (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme die Länge des Vektors  $\overrightarrow{PS}$  und damit den Abstand  $d$  zwischen  $P$  und  $E$ :

$$d = |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 0 + 4} = \sqrt{53}$$

$\Rightarrow$  Der Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Geraden  $g$  beträgt  $\sqrt{53} \approx 7,2801$ .

#### 2.8.4 Hessesche Normalenform (HNF)

Eine weitere Variante den **Abstand**  $d$  zwischen einem Punkt  $P$  und einer **Ebene**  $E$  zu berechnen, ist die sogenannte Hessesche Normalenform:

$$d(P, E) = \left| \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt  $P(5|1|-7)$  und der Ebene  $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$ ?

1. Wende die Hessesche Normalenform auf den Punkt  $P$  und die Ebene  $E$  an:

$$d(P, E) = \left| \frac{-7 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) - 4}{\sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{-35 - 14 - 4}{\sqrt{49 + 4}} \right| = \left| \frac{-53}{\sqrt{53}} \right| \approx |-7,2801| = 7,2801$$

#### 2.8.5 Gerade Ebene

Ein Abstand zwischen einer Geraden  $g$  und einer Ebene  $E$  existiert nur, wenn diese **parallel** zueinander sind. Somit hat jeder Punkt auf der Geraden  $g$  denselben Abstand zur Ebene  $E$ . Das Schema zur Berechnung des Abstands ist also folgendes:

1. Wähle den Stützvektor der Geraden  $g$  als Punkt  $P$  auf der Geraden  $g$  aus
2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Ebene  $E$

#### 2.8.6 Ebene Ebene

Ein Abstand zwischen zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  existiert nur, wenn diese **parallel** zueinander sind. Somit hat jeder Punkt auf der Ebene  $E_1$  denselben Abstand zur Ebene  $E_2$ . Das Schema zur Berechnung des Abstands ist also folgendes:

1. Wähle einen beliebigen Punkt  $P$  auf der Ebene  $E_1$  aus
2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Ebene  $E_2$

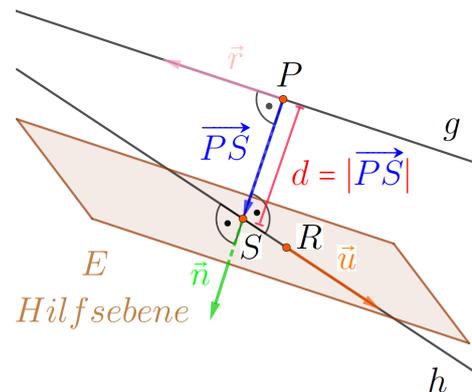
### 2.8.7 Gerade Gerade

Bei der Abstandsberechnung zwischen 2 Geraden  $g$  und  $h$  sind **zwei Fälle** zu unterscheiden:

**1.** Die beiden Geraden sind **parallel** zueinander. Das bedeutet, dass die beiden Geraden **überall (in jedem Punkt) denselben Abstand** zueinander haben. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist somit folgendes:

1. Wähle den Stützvektor der Geraden  $h$  als Punkt  $P$  auf der Geraden  $h$  aus
2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und der Geraden  $g$

**2.** Die beiden Geraden sind **windschief** zueinander. D.h. die beiden Geraden haben **nicht** überall denselben Abstand zueinander. Gesucht ist die Länge der **kürzesten Strecke** zwischen den beiden Geraden. Das Schema zur Berechnung des **Abstandes  $d$**  ist folgendes. Zunächst wird eine **Hilfsebene** aufgestellt, die die Gerade  $h$  beinhaltet und parallel zu der Geraden  $g$  ist. Anschließend wird der **Abstand  $d$**  zwischen der **Hilfsebene** und der Geraden  $g$  berechnet:



1. Wähle den Stützvektor der Geraden  $h$  als Punkt  $R$  auf der Geraden  $h$  aus
2. Stelle eine **Hilfsebene  $E$**  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $R$  verläuft und als **Normalenvektor** das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren der Geraden  $g$  und  $h$  ( $\vec{r}, \vec{u}$ ) hat:  $\vec{r} \times \vec{u} = \vec{n}$
3. Wähle den Stützvektor der Geraden  $g$  als Punkt  $P$  auf der Geraden  $g$  aus
4. Berechne den **Abstand** zwischen dem Punkt  $P$  und der **Hilfsebene  $E$**

**Hinweis:** Der Punkt  $S$  kann überall auf der **Hilfsebene  $E$**  liegen, er muss nicht zwangsläufig wie im Schaubild auf der Geraden  $h$  liegen.

**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen den Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

1. Wähle den Stützvektor der Geraden  $h$  als Punkt  $R$  auf der Geraden  $h$  aus:

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Stelle eine Hilfsebene  $E$  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $R$  verläuft und als Normalenvektor das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  hat:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ 3 - 2 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = b \Rightarrow b = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + -2 \cdot 2 = 2 - 4 - 4 = -6 \\ \Rightarrow E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \quad (\text{Das } b \text{ wird durch Einsetzen von } R \text{ in } E \text{ bestimmt})$$

3. Wähle den Stützvektor der Geraden  $g$  als Punkt  $P$  auf der Geraden  $g$  aus:

$$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt  $P$  und  $E$  (z.B. mit der HNF):

$$d(P, E) = \left| \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 - (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{8 + 7 - 6 + 6}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \right| = \left| \frac{15}{\sqrt{9}} \right| = \left| \frac{15}{3} \right| = |5| = 5$$

### 2.8.8 Abstand windschiefer Geraden

Eine weitere Variante den Abstand  $d$  zwischen zwei **windschiefen** Geraden  $g$  und  $h$  zu berechnen, ist die folgende Formel. Dabei ist  $\vec{p}$  der Stützvektor der Geraden  $g$ ,  $\vec{q}$  ist der Stützvektor der Geraden  $h$  und  $\vec{n}$  ist derjenige Vektor, der senkrecht zu beiden Geraden ist.  $\vec{n}$  wird mit dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  berechnet.

$$d(g, h) = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$$

$\vec{n}_0$  ist der Einheitsvektor, also der Vektor  $\vec{n}$  geteilt durch seine Länge  $|\vec{n}|$ :  $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ .

**Beispiel.** Wie ist der Abstand zwischen den Geraden

$$g: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{q}} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

1. Bestimme  $\vec{n}$  mit dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \\ 3 - 2 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

2. Wende die Formel zur Abstandsberechnung zweier windschiefer Geraden auf  $g$  und  $h$  an:

$$d(g, h) = \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}}$$

$$= \frac{|6 + 11 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|15|}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$$

## 2.9 Spiegelungen

**Punkt an Gerade:** Sind ein Punkt  $P$  sowie eine Gerade  $g$  gegeben und gesucht ist der Spiegelpunkt  $P'$ , der durch Spiegelung des Punktes  $P$  an der Geraden  $g$  entsteht, so lautet das Schema zur Berechnung des Spiegelpunktes  $P'$ :

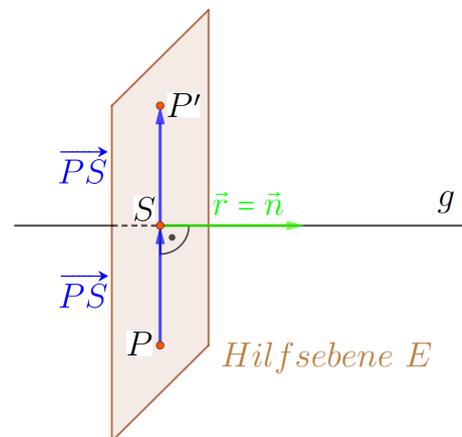
1. Stelle eine **Hilfsebene**  $E$  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  der Geraden  $g$  als **Normalenvektor**  $\vec{n}$  hat

2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der **Hilfsebene**  $E$  mit der Geraden  $g$

3. Stelle den Vektor  $\vec{PS}$  auf

4. Addiere den Vektor  $\vec{PS}$  zu dem Punkt  $S$  und erhalte  $P'$ :  $S + \vec{PS} = P'$  **oder** addiere den Vektor  $\vec{PS}$  2mal zu dem Punkt  $P$  und erhalte  $P'$ :

$$P + \vec{PS} + \vec{PS} = P + 2\vec{PS} = P'$$



**Beispiel.** Spiegele den Punkt  $P(3|1|8)$  an der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt } P'?$$

1. Stelle eine Hilfsebene  $E$  in Koordinatenform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den Richtungsvektor der Geraden  $g$  als Normalenvektor hat:

$$E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = b \Rightarrow b = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = -9 + 4 + 8 = 3 \\ \Rightarrow E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \quad (\text{Das } b \text{ wird durch Einsetzen von } P \text{ in } E \text{ bestimmt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsebene  $E$  mit der Geraden  $g$ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 3t \\ x_2 = 5 + 4t \\ x_3 = 6 + t \end{array}$$

$$g \text{ in } E: -3(-1 - 3t) + 4(5 + 4t) + (6 + t) = 3 \\ 3 + 9t + 20 + 16t + 6 + t = 3 \\ 29 + 26t = 3 \quad | -29 \\ 26t = -26 \quad | :26 \\ t = -1$$

$$t = -1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt der Hilfsebene  $E$  und der Geraden  $g$  hat die Koordinaten  $S(2|1|5)$ .

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $P$  und  $S$  auf:

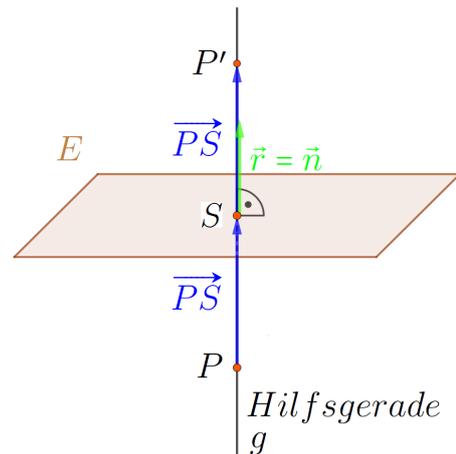
$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 1 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Addiere den Vektor  $\overrightarrow{PS}$  zu dem Punkt  $S$  und erhalte  $P'$ :

$$S + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der Spiegelpunkt  $P'$  hat die Koordinaten  $P'(1|1|2)$ .

**Punkt an Ebene:** Sind ein Punkt  $P$  sowie eine Ebene  $E$  gegeben und gesucht ist der Spiegelpunkt  $P'$ , der durch Spiegelung des Punktes  $P$  an der Ebene  $E$  entsteht, so lautet das Schema zur Berechnung des Spiegelpunktes  $P'$ :



1. Stelle eine Hilfsgerade  $g$  in Parameterform auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  als Richtungsvektor  $\vec{r}$  hat
2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsgeraden  $g$  mit der Ebene  $E$

3. Stelle den Vektor  $\vec{PS}$  auf

4. Addiere den Vektor  $\vec{PS}$  zu dem Punkt  $S$  und erhalte  $P'$ :  $S + \vec{PS} = P'$  **oder** addiere den Vektor  $\vec{PS}$  2mal zu dem Punkt  $P$  und erhalte  $P'$ :

$$P + \vec{PS} + \vec{PS} = P + 2\vec{PS} = P'$$

**Beispiel.** Spiegele den Punkt  $P(5|1|-7)$  an der Ebene  $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$ . Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt  $P'$ ?

1. Stelle eine Hilfsgerade  $g$  auf, die durch den Punkt  $P$  verläuft und den Normalenvektor der Ebene  $E$  als Richtungsvektor hat:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (P \text{ wird als Stützvektor von } g \text{ eingesetzt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt  $S$  der Hilfsgeraden  $E$  mit der Ebene  $E$ :

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: & -7(5 - 7t) + 0(1 + 0t) + 2(-7 + 2t) = 4 \\ & -35 + 49t + 0 - 14 + 4t = 4 \\ & -49 + 53t = 4 \quad | +49 \\ & 53t = 53 \quad | :53 \\ & t = 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt:  $S(-2|1|-5)$ .

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten  $P$  und  $S$  auf:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -2 - 5 \\ 1 - 1 \\ -5 - (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Addiere den Vektor  $\overrightarrow{PS}$  zu dem Punkt  $S$  und erhalte  $P'$ :

$$S + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

⇒ Der Spiegelpunkt  $P'$  hat die Koordinaten  $P'(-9|1|-3)$ .

## 2.10 Schatten durch punktförmige Lichtquelle oder Strahlen

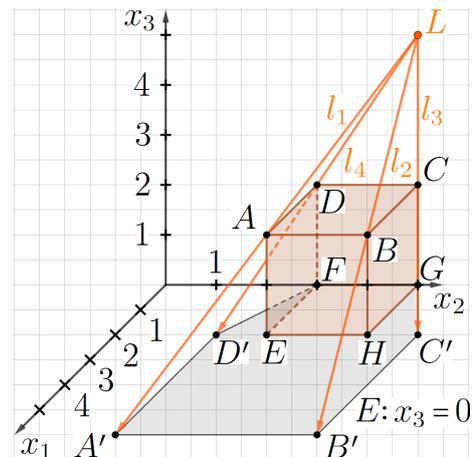
**Punktförmige Lichtquelle:** Wird der Schatten eines Objektes durch eine **punktförmige Lichtquelle**  $L$  (z.B. eine Glühbirne im Raum) auf eine Ebene  $E$  erzeugt, so kann man die Schattenpunkte des Objektes mithilfe von **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  berechnen und anschließend den Schatten des Objektes zeichnen. Das Schema hierfür ist folgendes:

1. Stelle **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  in Parameterform auf, welche die **punktförmige Lichtquelle**  $L$  mit den Eckpunkten des Objektes, die Schatten werfen, verbinden

2. Schneide die **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  mit der Ebene  $E$ , auf die die Schatten fallen

3. Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte und (sofern auf der Ebene  $E$  vorhanden!) die „äußeren“ Punkte des Objektes miteinander

4. Die eingeschlossene Fläche ist der Schatten des Objektes auf der Ebene  $E$



**Beispiel.** Zeichne den Quader mit den Eckpunkten  $A(2|3|2)$ ,  $B(2|5|2)$ ,  $C(0|5|2)$ ,  $D(0|3|2)$ ,  $E(2|3|0)$ ,  $F(0|3|0)$ ,  $G(0|5|0)$  und  $H(2|5|0)$  in ein Koordinatensystem ein. Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt  $L(-2|4|4)$ . Zeichne den Schatten des Quaders in das Koordinatensystem ein, der durch die Lichtquelle  $L$  auf die  $x_1x_2$ -Ebene ( $E: x_3 = 0$ ) geworfen wird.

1. Stelle Hilfsgeraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  auf, welche die Lichtquelle  $L$  mit den Punkten  $A, B, C, D$  verbinden. (Das sind die einzigen Punkte, die Schatten auf die  $x_1x_2$ -Ebene werfen, da die anderen Eckpunkte  $E, F, G, H$  auf der  $x_1x_2$ -Ebene ( $E: x_3 = 0$ ) liegen (Die  $x_3$ -Koordinate ist in diesen 4 Punkten gleich 0)) Wähle dafür als Stützvektor jeweils den Punkt  $L$  und als Richtungsvektor jeweils den Vektor zwischen  $L$  und den Eckpunkten  $A, B, C, D$ :

$$l_1: \vec{x} = \vec{OL} + t \cdot \vec{LA} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 3-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2: \vec{x} = \vec{OL} + s \cdot \vec{LB} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 5-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_3: \vec{x} = \vec{OL} + r \cdot \vec{LC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 5-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_4: \vec{x} = \vec{OL} + u \cdot \vec{LD} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 3-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**2.** Schneide die Hilfsgeraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  mit der Ebene  $E$  und erhalte die Schattenpunkte von  $A, B, C, D$ :

$$l_1 \text{ in } E: 0(-2+4t) + 0(4-t) + 1(4-2t) = 0$$

$$4-2t = 0 \quad | -4$$

$$-2t = -4 \quad | :(-2)$$

$$t = 2$$

$$t = 2 \text{ in } l_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der Schattenpunkt von  $A$  ist:  $A'(6|2|0)$ .

Berechnen der 3 weiteren Schnittpunkte von den Geraden  $l_2, l_3, l_4$  mit der Ebene  $E$  nach demselben Schema ergibt:

$\Rightarrow$  Der Schattenpunkt von  $B$  ist:  $B'(6|6|0)$ .

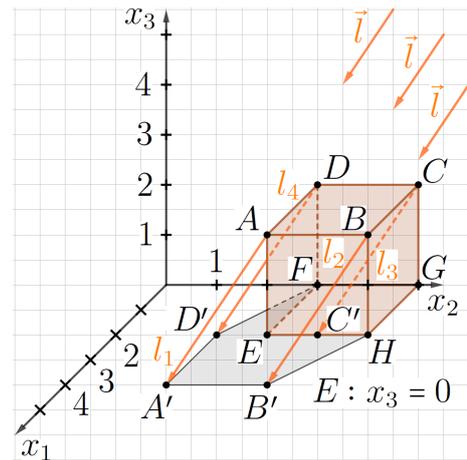
$\Rightarrow$  Der Schattenpunkt von  $C$  ist:  $C'(2|6|0)$ .

$\Rightarrow$  Der Schattenpunkt von  $D$  ist:  $D'(2|2|0)$ .

**3.** Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte (in dem Fall  $A', B', C', D'$ ) und (sofern auf der Ebene  $E$  vorhanden!) die „äußeren“ Punkte des Objektes (in dem Fall  $F, G$ ) miteinander. (Die Punkte  $E$  und  $H$  liegen „innerhalb“ der genannten „äußeren“ Punkte) Die eingeschlossene Fläche ist der gesuchte Schatten. (siehe oberes Schaubild).

**Strahlen als Lichtquelle:** Wird der Schatten eines Objektes durch eine weitentfernte Lichtquelle (z.B. Sonne) durch deren **Strahlen**  $\vec{l}$  auf eine Ebene  $E$  erzeugt, so kann man die Schattenpunkte des Objektes mithilfe von **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  berechnen und anschließend den Schatten des Objektes zeichnen. Das Schema hierfür ist folgendes:

1. Stelle **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  in Parameterform auf, welche die **Strahlen**  $\vec{l}$  als Richtungsvektor haben und durch die Eckpunkte des Objektes, die Schatten werfen, verlaufen
2. Schneide die **Hilfsgeraden**  $l_1, l_2, l_3, \dots$  mit der Ebene  $E$ , auf die die Schatten fallen
3. Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte und (sofern auf der Ebene  $E$  vorhanden!) die „äußeren“ Punkte des Objektes miteinander
4. Die eingeschlossene Fläche ist der Schatten des Objektes auf der Ebene  $E$



**Beispiel.** Zeichne den Quader mit den Eckpunkten  $A(2|3|2)$ ,  $B(2|5|2)$ ,  $C(0|5|2)$ ,  $D(0|3|2)$ ,  $E(2|3|0)$ ,  $F(0|3|0)$ ,  $G(0|5|0)$  und  $H(2|5|0)$  in ein Koordinatensystem ein. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor  $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  beschrieben. Zeichne den Schatten des Quaders in das Koordinatensystem ein, der durch die Sonnenstrahlen  $\vec{l}$  auf die  $x_1x_2$ -Ebene ( $E: x_3 = 0$ ) geworfen wird.

1. Stelle Hilfsgeraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  auf, welche die Strahlen  $\vec{l}$  als Richtungsvektor haben und durch die Punkte  $A, B, C, D$  verlaufen. (Das sind die einzigen Punkte, die Schatten auf die  $x_1x_2$ -Ebene werfen, da die anderen Eckpunkte  $E, F, G, H$  auf der  $x_1x_2$ -Ebene ( $E: x_3 = 0$ ) liegen (Die  $x_3$ -Koordinate ist in diesen 4 Punkten gleich 0)) Wähle dafür als Stützvektor den jeweiligen Eckpunkt  $A, B, C, D$ :

$$l_1: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_3: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_4: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + u \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schneide die Hilfsgeraden  $l_1, l_2, l_3, l_4$  mit der Ebene  $E$  und erhalte die Schattenpunkte von  $A, B, C, D$ :

$$l_1 \text{ in } E: \begin{aligned} 0(2+2t) + 0(3-t) + 1(2-2t) &= 0 \\ 2-2t &= 0 \quad | -2 \\ -2t &= -2 \quad | :(-2) \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } l_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Der Schattenpunkt von  $A$  ist:  $A'(4|2|0)$ .

Berechnen der 3 weiteren Schnittpunkte von den Geraden  $l_2, l_3, l_4$  mit der Ebene  $E$  nach demselben Schema ergibt:

⇒ Der Schattenpunkt von  $B$  ist:  $B'(4|4|0)$ .

⇒ Der Schattenpunkt von  $C$  ist:  $C'(2|4|0)$ .

⇒ Der Schattenpunkt von  $D$  ist:  $D'(2|2|0)$ .

3. Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte (in dem Fall  $A', B', D'$ ) und (sofern auf der Ebene  $E$  vorhanden!) die „äußeren“ Punkte des Objektes (in dem Fall  $F, G, H$ ) miteinander. (Die Punkte  $C'$  und  $E$  liegen „innerhalb“ der genannten „äußeren“ Punkte) Die eingeschlossene Fläche ist der gesuchte Schatten. (siehe oberes Schaubild).

## 2.11 Winkel

**Schnittwinkel zwischen Gerade und Gerade:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen 2 Geraden  $g$  und  $h$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  von  $g$  und  $h$  geteilt durch die Länge von  $\vec{r}$  mal die Länge von  $\vec{v}$ . Die Gleichung

lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{v}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen den Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 9 + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 9}} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} \approx 0,2452 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,2452 & | \cos^{-1} \\ \Rightarrow \alpha &= \cos^{-1}(0,2452) \\ \Rightarrow \alpha &\approx 75,8^\circ \end{aligned}$$

**Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen einer Gerade  $g$  und einer Ebene  $E$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt des Richtungsvektors  $\vec{r}$  von  $g$  und des Normalenvektors  $\vec{n}$  von  $E$  geteilt durch die Länge von  $\vec{r}$  mal die Länge von  $\vec{n}$ . Die Gleichung lautet:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen der Ebene  $E: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$

$$\text{und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|12 + 4 - 10|}{\sqrt{16 + 1 + 25} \cdot \sqrt{9 + 16 + 4}} \\ &= \frac{|6|}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,1719 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(\alpha) &= 0,1719 && | \sin^{-1} \\ \Rightarrow \alpha &= \sin^{-1}(0,1719) \\ \Rightarrow \alpha &\approx 9,9^\circ \end{aligned}$$

**Schnittwinkel zwischen Ebene und Ebene:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen 2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  von  $E_1$  und  $E_2$  geteilt durch die Länge von  $\vec{n}_1$  mal die Länge von  $\vec{n}_2$ . Die Gleichung lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen den Ebenen

$$E_1 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \text{ und } E_2 : 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4?$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{|6 - 4 - 15|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{9 + 16 + 25}} \\ &= \frac{|-13|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} \approx 0,4914 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,4914 && | \cos^{-1} \\ \Rightarrow \alpha &= \cos^{-1}(0,4914) \\ \Rightarrow \alpha &\approx 60,57^\circ \end{aligned}$$

### 3 Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind anbei einführende Begriffe erläutert, die als Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen.

#### 3.1 Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

**Zufallsexperiment:** In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet ein Zufallsexperiment, ein Experiment (Versuch), das bei wiederholter Durchführung unter gleichen „Versuchsbedingungen“ unterschiedliche Ausgänge annehmen kann. Der Ausgang eines solchen Zufallsexperiments ist somit nicht voraussagbar, also zufällig.

**Beispiel.** Münzwurf, Würfeln, Roulette, Lotto, usw.

**Ergebnisraum:** Der Ergebnisraum  $E$  (oder auch als  $\Omega$  bezeichnet) in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet alle möglichen Ausgänge (**Ergebnisse**) eines Zufallsexperiments.

**Beispiel.**

Ergebnismenge Münzwurf:  $E = \{Kopf, Zahl\}$

Ergebnismenge Würfeln:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Ereignis:** Als Ereignis wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraums  $E$  eines Zufallsexperiments bezeichnet. Ein Ereignis „tritt ein“ nach der Durchführung eines Zufallsexperiments, wenn das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ein Element des Ereignisses ist. Als **Gegenereignis** wird die „andere“ Teilmenge des Ergebnisraums  $E$  bezeichnet. Also alle Elemente, die nicht im Ereignis „enthalten“ sind.

**Beispiel.** Würfeln: Ergebnismenge  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis  $A$ : „Würfeln einer 2, 3 oder 4“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn entweder eine 2, 3 oder 4 gewürfelt wird

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $A$ “ tritt ein, wenn entweder eine 1, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis  $B$ : „Würfeln einer 1“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn eine 1 gewürfelt wird

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $B$ “ tritt ein, wenn entweder eine 2, 3, 4, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis  $C$ : „Die Augenzahl ist mindestens eine 4“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn die gewürfelte Augenzahl größer oder gleich 4 ist, somit 4, 5 oder 6

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $C$ “ tritt ein, wenn entweder eine 1, 2 oder 3 gewürfelt wird

**Zufallsvariable:** Eine Zufallsvariable  $X$  ordnet **jedem** Ergebnis eines Zufallsexperiments (also **jedem** Element des Ergebnisraums  $E$ ) eine Zahl zu.

**Beispiel.** Aus einer Tüte mit 10 Schrauben Inhalt werden 6 Schrauben entnommen mit der Zufallsvariable „ $X =$  Anzahl der defekten Schrauben“:

Ergebnis	0 defekt	1 defekt	2 defekt	3 defekt	4 defekt	5 defekt	6 defekt
$X$	0	1	2	3	4	5	6

**Beispiel.** In einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge:  $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, verliert der Spieler seine 2 Euro Einsatz

WENN einmal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück

WENN zweimal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz + 2 Euro

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Gewinn}$ “ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu:

Ergebnis	(Kopf Kopf)	(Kopf Zahl)	(Zahl Kopf)	(Zahl Zahl)
$X$	-2	0	0	2

**Wahrscheinlichkeitsverteilung:** Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nutzen wir den Buchstaben  $P$  („englisch probability = Wahrscheinlichkeit“) als Schreibweise:

$P(\text{Ereignis } A) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis } A \text{ eintritt}$

$P(X = k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X = k \text{ ist}$

$P(X \geq k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X \text{ **mindestens** so groß ist wie } k$

$P(X \leq k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X \text{ **höchstens** so groß ist wie } k$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraums  $E$ ) eine Wahrscheinlichkeit zu, dass es eintritt.

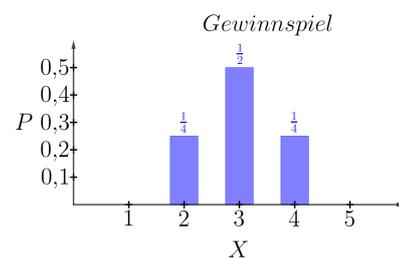
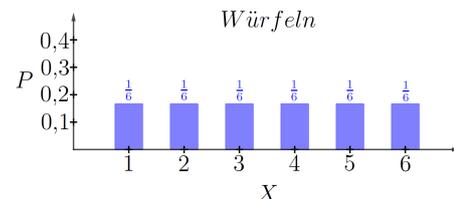
**Beispiel.** Würfeln:

Ergebnismenge:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Augenzahl}$ “ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu.

$X$	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Das Experiment ist ein **Laplace-Experiment**, da alle Ergebnisse (Ausgänge) des Zufallsexperiments „Würfeln“ **dieselbe** Wahrscheinlichkeit haben.



**Beispiel.** In einem Gewinnspiel mit 0 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge:  $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 2 Euro

WENN einmal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 3 Euro

WENN zweimal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 4 Euro

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Gewinn}$ “ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu.

$X$	2	3	4
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

### 3.2 Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist ein anschauliches Hilfsmittel um die Ergebnisse eines Zufallsexperiments aufzuschreiben, insbesondere die Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsexperiments (z. B. Mehrmaliger Münzwurf, Mehrmaliges Würfeln, Mehrmaliges Drehen eines Glücksrads). Bei solch einem mehrstufigen Zufallsexperiments lassen sich sehr gut die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelexperimente sowie die Wahrscheinlichkeiten möglicher Ereignisse rechnerisch ermitteln.

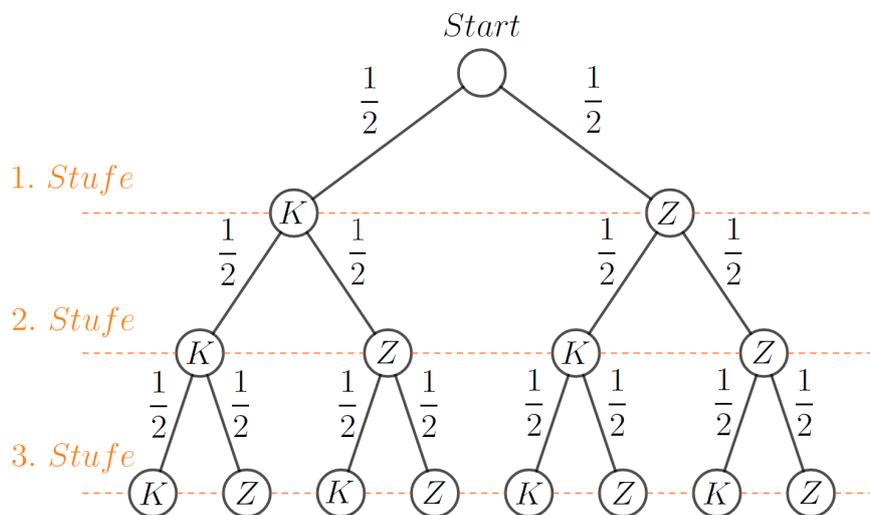
Um bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ein Baumdiagramm zu zeichnen gilt es zunächst die Stufen herauszufinden und die jeweiligen möglichen „Ergebnisketten“. Diese Ergebnisketten werden miteinander verbunden. Auf die Verbindungsstrecken schreibt man die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweils nachfolgenden Ergebnisses.

**Beispiel.** Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen:

Ergebnismenge pro Münzwurf:  $E = \{Kopf, Zahl\}$

Ereignis	<i>Kopf</i> ( <i>K</i> )	<i>Zahl</i> ( <i>Z</i> )
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Es gibt **3 Stufen** im Baumdiagramm, da die Münze dreimal geworfen wird.



**Pfad:** Der Pfad in einem Baumdiagramm entspricht einem Weg durch den Baum, also einer „Ergebniskette“. Ein Pfad startet immer im Startpunkt und endet in der letzten Stufe. Wirft man beispielsweise eine Münze dreimal hintereinander, dann entspricht jede mögliche Ergebniskette (Versuchsausgang)  $(K|K|K)$ ,  $(K|K|Z)$ ,  $(K|Z|K)$ ,  $(K|Z|Z)$ ,

$(Z|K|K), (Z|K|Z), (Z|Z|K), (K|Z|Z)$  einem Pfad.

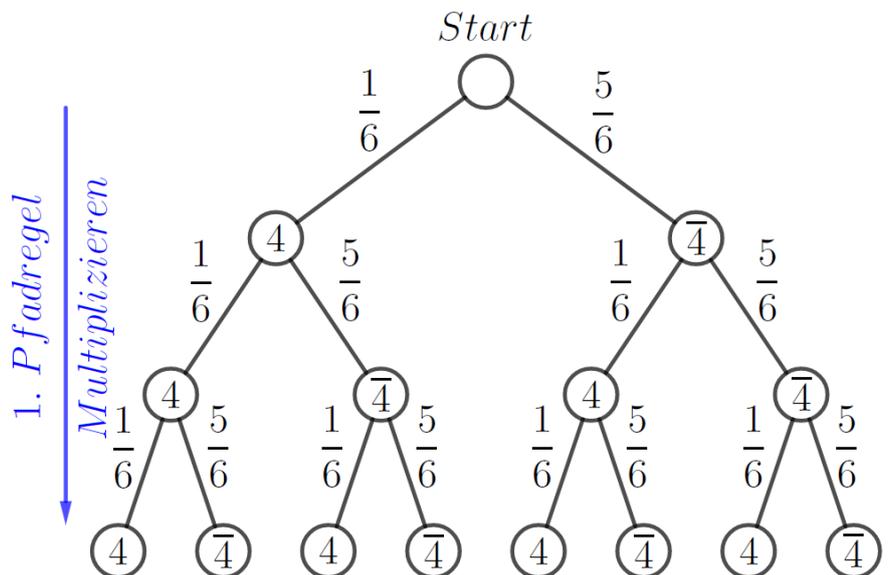
**1. Pfadregel:** Um die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Versuchsausgang (einen Pfad) zu bestimmen, **multipliziert** man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades miteinander.

**Beispiel.** Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dreimal hintereinander **keine** 4 gewürfelt?

Die Schreibweise für **Nicht-4** ist  $\bar{4}$ . Sie beinhaltet die Augenzahlen  $\bar{4} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ . Wir können die Ergebnismenge für jeden einzelnen Würfelwurf so schreiben:  $E = \{4, \bar{4}\}$

Ereignis	4	$\bar{4}$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Es gibt 3 Stufen im Baumdiagramm, da der Würfel dreimal geworfen wird.



$E$	$(4 4 4)$	$(4 4 \bar{4})$	$(4 \bar{4} 4)$	$(4 \bar{4} \bar{4})$	$(\bar{4} 4 4)$	$(\bar{4} 4 \bar{4})$	$(\bar{4} \bar{4} 4)$	$(\bar{4} \bar{4} \bar{4})$
$P$	$\frac{1}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

**2. Pfadregel**

**Addieren**

Wir nutzen die **1. Pfadregel** um die Wahrscheinlichkeit für „dreimal hintereinander keine 4“ (Ergebniskette/Pfad:  $(\bar{4}|\bar{4}|\bar{4})$ ) zu bestimmen:

$$P((\bar{4}|\bar{4}|\bar{4})) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0,5787$$

**2. Pfadregel:** Umfasst ein Ereignis mehrere Versuchsausgänge (Pfade), so berechnet man die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, indem man die Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Pfade (Versuchsausgänge) miteinander **addiert**.

Z.B. könnte eine Fragestellung in obigem Beispiel sein: Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim dreimaligem Würfelwurf genau 2 Vieren gewürfelt?

Das Ereignis „Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“ umfasst die Pfade  $(4|4|\bar{4})$ ,  $(4|\bar{4}|4)$  und  $(\bar{4}|4|4)$ . Wir nutzen die **2. Pfadregel** um die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu bestimmen:

$$P(\text{„Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“}) = \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \approx 0,0694$$

### 3.3 Gegenwahrscheinlichkeit

Oftmals ist es einfacher die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (der „Gegenwahrscheinlichkeit“) zu bestimmen. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{Ereignis}) = 1 - P(\text{Gegenereignis})$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ( $P(\text{Gegenereignis})$ ) also deutlich „einfacher“ und somit schneller zu berechnen ist (z.B. da im Baumdiagramm das Gegenereignis deutlich weniger Pfade beinhaltet, die es nach der 2. Pfadregel aufzuaddieren gilt), ist der Weg die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses über die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen effizienter.

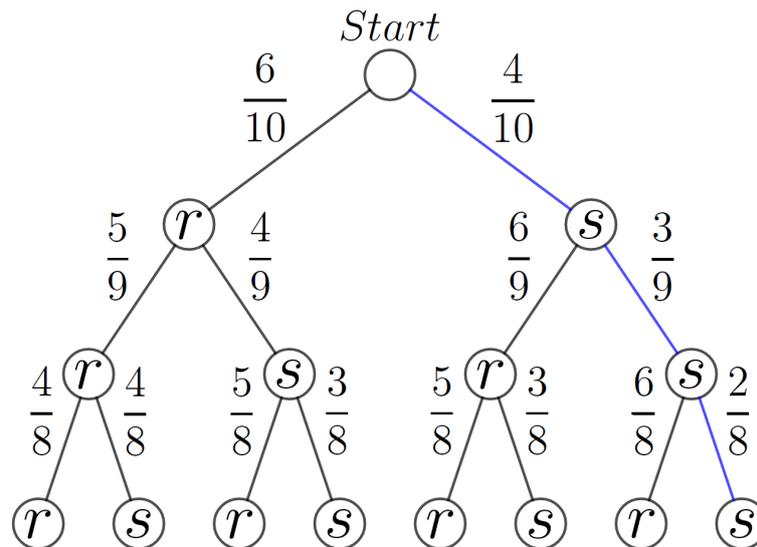
**Beispiel.** Aus einer Urne mit 6 roten und 4 schwarzen Kugeln werden drei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der gezogenen Kugeln rot?

1. Überlegen, ob die Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ einfacher ist:

Das Gegenereignis ist: „Keine der gezogenen Kugeln ist rot“ = „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“

⇒ Im Baumdiagramm beinhaltet dieses Gegenereignis bloß **einen Pfad**, weshalb die Wahrscheinlichkeit für dieses Gegenereignis deutlich einfacher zu bestimmen ist!

**Achtung:** Die Kugeln werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die gezogenen Kugeln kommen nicht wieder zurück in die Urne, d.h. nach der ersten Ziehung sind **nur noch 9 Kugeln** in der Urne und nach der zweiten Ziehung **nur noch 8 Kugeln!**



Somit ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ über die Gegenwahrscheinlichkeit einfacher:

$$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - P(\text{„Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“})$$

$$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0,9667$$

### 3.4 Erwartungswert

Bei einem Zufallsexperiment gibt der Erwartungswert den Wert an, den man durchschnittlich erzielt. Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die jedem Ergebnis des Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraumes  $E$ ) eine Zahl zuordnet. Um den Erwartungswert  $E(X)$  des Zufallsexperiments zu bestimmen, **multipliziert** man den  $X$ -Wert von jedem Ergebnis mit seiner jeweiligen Wahrscheinlichkeit  $P(X)$  und **addiert** diese Produkte aufeinander.

**Hinweis:** Zur Übersicht ist es hilfreich sich zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments in Tabellenform aufzuschreiben und anschließend den Erwartungswert zu berechnen.

**Beispiel.** Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Zufallsvariable „ $X = \text{Augenzahl}$ “ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu. Wie ist der Erwartungswert?

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments „Einmal würfeln“:

$X$	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert  $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$

⇒ Durchschnittlich erzielt man somit bei einem Würfelwurf eine 3,5.

**Beispiel.** Bei einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz werden aus einem Blackjack-Kartendeck mit 52 Karten zwei Karten **ohne** Zurücklegen hintereinander gezogen:

WENN der Spieler keine Dame aufdeckt, erhält der Spieler keinen Gewinn

WENN der Spieler unter den 2 Karten eine Dame aufdeckt, gewinnt er 10 Euro

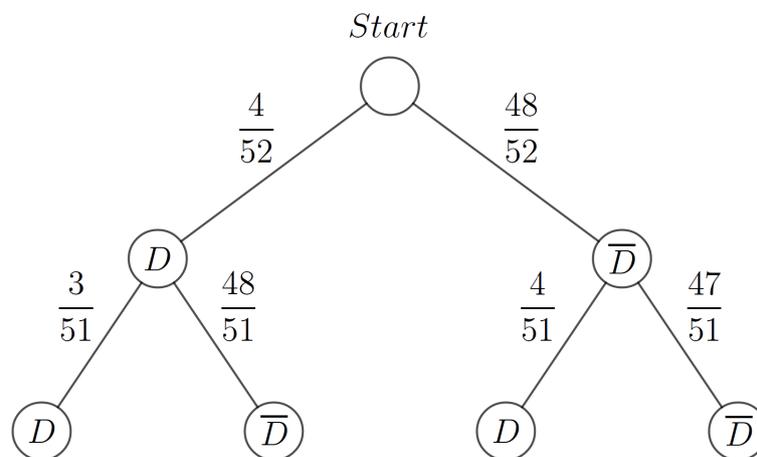
WENN der Spieler zwei Damen aufdeckt, gewinnt er 50 Euro

Ist dieses Gewinnspiel fair?

Bei dieser Fragestellung gilt es nun herauszufinden, was der erwartete Gewinn dieses Gewinnspiels ist. Entspricht der erwartete Gewinn den Einsatzkosten von 2 Euro, so ist dieses Spiel fair.

1. Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels mithilfe eines Baumdiagramms:

Der Buchstabe  $D$  steht für das Ergebnis eine Dame aufzudecken, während  $\bar{D}$  für das Ergebnis steht, keine Dame aufzudecken. **Achtung:** Die Karten werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die erste gezogene Karte bleibt aufgedeckt liegen und beim Ziehen der 2. Karte sind **nur noch 51 Karten** im Deck!



Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels „2 Karten ziehen“:

Ergebnis	$(D D)$	$(D \bar{D})$	$(\bar{D} D)$	$(\bar{D} \bar{D})$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$	$\frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}$	$\frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{16}{221}$	$\frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$

2. Bestimmen des Erwartungswerts des Glückspiels:

$$E(\text{Gewinnspiel}) = 50 \cdot \frac{1}{221} + 10 \cdot \frac{16}{221} + 10 \cdot \frac{16}{221} + 0 \cdot \frac{188}{221} = \frac{370}{221} \approx 1,6742$$

⇒ Der erwartete Gewinn beträgt 1,67 Euro. Damit ist dieses Gewinnspiel mit einem Einsatz von 2 Euro nicht fair!

### 3.5 Fakultät $n!$

Die Fakultät einer natürlichen Zahl  $n!$  berechnet beispielsweise die Lösungen für folgende Fragen:

**Beispiel.**

1. Angenommen alle Becher unterscheiden sich farblich voneinander. Wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es beim Beerpong die 10 Becher auf einer Seite aufzustellen?

2. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 5 Bücher auf einen Schrank zu stellen?

1.  $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$  (verschiedene Möglichkeiten)

2.  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  (verschiedene Möglichkeiten)

**Hinweis:**  $0! = 1$  Ansonsten werden alle Fakultäten wie oben berechnet: Die Zahl wird jeweils multipliziert mit den Zahlen immer um eins absteigend bis zur 1.

### 3.6 Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient

**Bernoulli-Experiment:** Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit **immer genau 2 möglichen Versuchsausgängen (Ergebnissen):**

z.B. („Treffer“ | „Nicht-Treffer“) = („Die 6 wird gewürfelt“ | „Die 6 wird nicht gewürfelt“), („Schraube ist defekt“ | „Schraube ist nicht defekt“), („Patient ist infiziert“ | „Patient ist nicht infiziert“), („Gewinn“ | „Niete“), („Erfolg“ | „Misserfolg“), („Kopf“ | „Zahl“), usw. (d.h. der Ergebnisraum  $E$  besteht immer aus genau 2 Elementen).

**Binomialkoeffizient:** Führt man ein Bernoulli-Experiment  $n$ -mal durch, d.h. man wiederholt das Experiment  $n$ -mal (mehrstufiges Bernoulli-Experiment), so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge  $n$ . Sei  $k$  die Anzahl an „Treffern“ in der Bernoulli-Kette und dementsprechend  $n - k$  die Anzahl an „Nicht-Treffern“. Da das Bernoulli-Experiment nur  $n$ -mal durchgeführt wird kann  $k$  (die Anzahl der „Treffer“) maximal so groß sein wie  $n$  ( $k \leq n$ ). Der Binomialkoeffizient berechnet bei  $k$  Treffern in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$ , wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) es

für die Reihenfolge der „Treffer“ und „Nicht-Treffer“ gibt. Die Schreibweise für den Binomialkoeffizienten ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Beispiel.**  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{1} = 56$

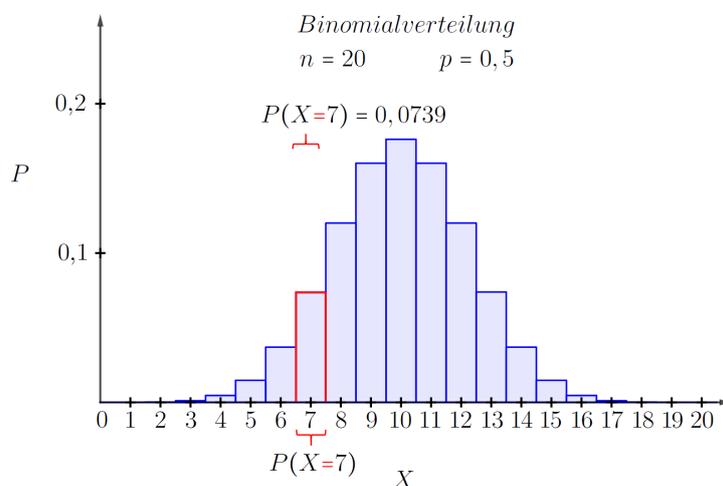
**Binomialverteilung:** Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeiten  $P$  von Bernoulli-Ketten. Ist die Erfolgswahrscheinlichkeit, in einem Bernoulli-Experiment einen „Treffer“ zu landen, gleich  $p$ , so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  **genau  $k$  Treffer** auftreten, folgendermaßen. Man kann entweder  $B(n, p, k)$  oder  $P(X = k)$  schreiben:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**Beispiel.** Eine Münze wird 20-mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **genau 7-mal** Kopf zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also Kopf zu werfen, ist  $p = 0,5$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus  $n = 20$  Würfeln **genau  $k = 7$**  mal Kopf (Treffer) zu werfen:

$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot 0,5^7 \cdot (1-0,5)^{20-7} = \frac{20!}{7! \cdot (20-7)!} \cdot 0,5^7 \cdot (0,5)^{13} \approx 0,0739$$



**Taschenrechner:** Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit  $P(X=k)$  (also „**genau  $k$  Treffer**“) mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „**binompdf**“ oder auch „**Binomial PD**“. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander  $n$ ,  $p$  und  $k$  ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

### 3.6.1 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Kommt in einer Aufgabenstellung zu einer binomialverteilten Zufallsvariable  $X$ , die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für „höchstens  $k$  Treffer“ oder „mindestens  $k$  Treffer“, so handelt es sich um eine kumulierte Wahrscheinlichkeit. Es ist nicht die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses:  $P(X = k)$ , sondern nach mehreren einzelnen Ereigniswahrscheinlichkeiten vereint/kumuliert:

$$P(X \leq k) \Rightarrow \text{„höchstens } k \text{ Treffer“}$$

$$P(X \geq k) \Rightarrow \text{„mindestens } k \text{ Treffer“}$$

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **höchstens 2 Schrauben** defekt?

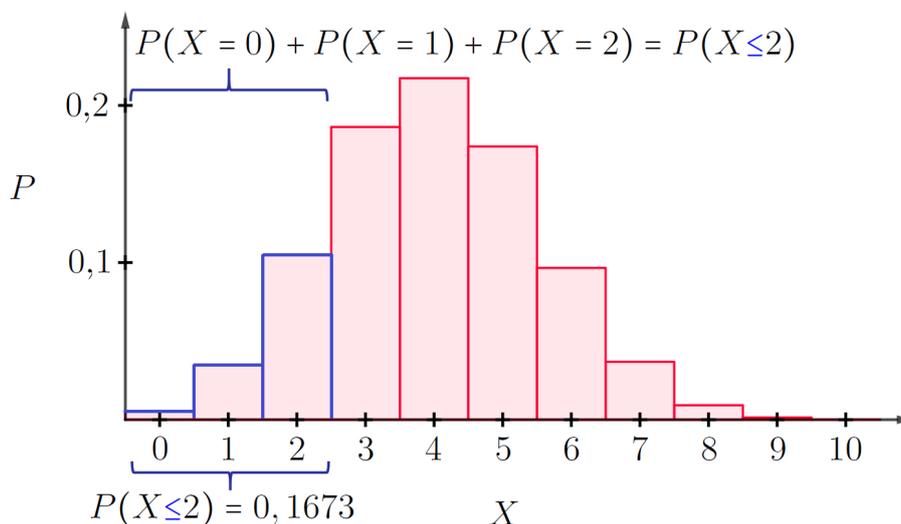
Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **höchstens  $k \leq 2$**  Schrauben zu erhalten:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot (0,6)^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (0,6)^8$$

$$\approx 0,1673$$

*Binomialverteilung*  
 $n = 10$        $p = 0,4$



**Taschenrechner:** Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq k)$  (also „höchstens  $k$  Treffer“) mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „binomcdf“ oder auch

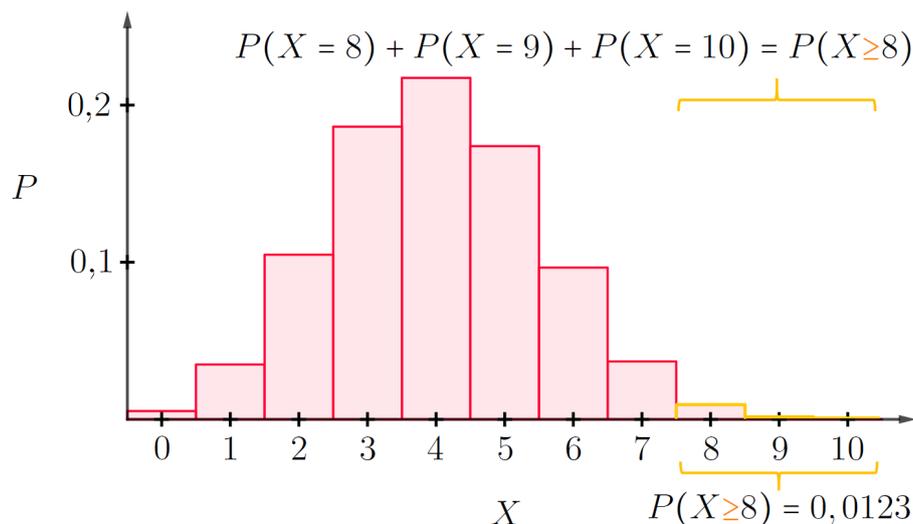
„Binomial CD“. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander  $n$ ,  $p$  und  $k$  ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **mindestens 8 Schrauben** defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **mindestens  $k \geq 8$  Schrauben** zu erhalten:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\
 &= \binom{10}{8} \cdot 0,4^8 \cdot (0,6)^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,4^9 \cdot (0,6)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot (0,6)^0 \\
 &\approx 0,0123
 \end{aligned}$$

*Binomialverteilung*  
 $n = 10 \quad p = 0,4$



**Taschenrechner:** Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$  (also „**mindestens  $k$  Treffer**“) gibt es keine Funktion im Taschenrechner. Man muss zunächst die Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$  mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

Nun kann man im Taschenrechner wieder über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ die Wahrscheinlichkeit für  $P(X \leq k - 1)$  (also „**höchstens  $k - 1$  Treffer**“) ausrechnen. 1 Minus das Ergebnis liefert dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$ .

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **mindestens 8 Schrauben** defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **mindestens  $k \geq 8$**  Schrauben zu erhalten:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 8 - 1) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,9877 = 0,0123$$

### 3.6.2 Stochastisches Tafelwerk, Tabelle-Binomialverteilung

Das stochastische Tafelwerk, als eine Tabelle der Binomialverteilung  $B(n, p)$ , dient als Hilfsmittel um Wahrscheinlichkeiten  $P(X = k)$  oder  $P(X \leq k)$  einer binomialverteilten Zufallsvariable  $X$  für verschiedene Werte von  $n$ ,  $p$  und  $k$  abzulesen.

Man unterscheidet 2 Arten des stochastischen Tafelwerks der Binomialverteilung. Das eine Tafelwerk gibt uns die Wahrscheinlichkeiten für **genau  $k$  Treffer** an. Man schreibt dafür entweder  $B(n, p, k)$  oder  $P(X = k)$ . Das andere Tafelwerk gibt uns die **kumulierten/aufaddierten** Wahrscheinlichkeiten für **höchstens  $k$  Treffer** an. Man schreibt dafür entweder  $F(n, p, k)$  oder  $P(X \leq k)$ . Es folgt zu beiden Arten ein Beispiel.

**Beispiel.**  $B(n, p, k)$  oder  $P(X = k)$ : Ein Würfel wird 5-mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **genau** zwei Sechsen zu würfeln? Ermittle die Wahrscheinlichkeit mithilfe des gegebenen Tafelwerks.

Die Nutzung des Tafelwerks funktioniert folgendermaßen. In der Spalte ganz links und rechts steht die Anzahl  $n$  der Durchführungen des Zufallsexperiments. In der **oberen** Zeile stehen die möglichen **Wahrscheinlichkeiten  $p$**  aufsteigend von  $0,02 \dots 0,5$ . Die zu diesen möglichen  **$p$ -Werten** zugehörigen  **$k$ -Werte** stehen in der  $k$ -Spalte am linken Rand aufsteigend von  $0 \dots n$ . In der **unteren** Zeile stehen die möglichen **Wahrscheinlichkeiten  $p$**  absteigend von  $0,98 \dots 0,5$ . Die zu diesen möglichen  **$p$ -Werten** zugehörigen  **$k$ -Werte** stehen in der  $k$ -Spalte am rechten Rand absteigend von  $n \dots 0$ .

Um die Wahrscheinlichkeit für bestimmte Werte für  $n$ ,  $p$  und  $k$  abzulesen, wählt man zunächst das Tafelwerk, das den Wert  $n$  enthält und sucht anschließend die Spalte, in der das gegebene  $p$  sich befindet. Je nachdem ob sich dieses  $p$  in der **oberen** oder **unteren** Zeile befindet, gibt diejenige Zelle in der  $p$ -Spalte die gesuchte Wahrscheinlichkeit an, die sich in der zugehörigen  $k$ -Zeile befindet ( **$k$ -Wert** oder  **$k$ -Wert**).

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also eine Sechsen zu würfeln, ist  $p = \frac{1}{6}$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, aus  $n = 5$  Würfeln **genau  $k = 2$**  mal eine Sechsen (Treffer) zu werfen, durch Ablesen der entsprechenden **Zelle** ( $p$ -Spalte| $k$ -Zeile)  $\Rightarrow$   $(\frac{1}{6} | 2) \Rightarrow 0,1608$ :

$$B\left(5, \frac{1}{6}; 2\right) = P(X = 2) = 0,1608$$

*Binomialverteilung*

$B(n, p, k) = P(X = k) = \text{abgelesener Wert}$

		p												
n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	n
5	0	0,9039	0,8587	0,8154	0,7738	0,5905	0,4019	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,0778	0,0313	5
	1	0,0922	0,1328	0,1699	0,2036	0,3281	0,4019	0,4096	0,3955	0,3601	0,3292	0,2592	0,1563	4
	2	0,0038	0,0082	0,0142	0,0214	0,0729	0,1608	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3456	0,3125	3
	3	0,0001	0,0003	0,0006	0,0011	0,0081	0,0322	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,2304	0,3125	2
	4					0,0005	0,0032	0,0064	0,0146	0,0283	0,0412	0,0768	0,1563	1
5						0,0001	0,0003	0,001	0,0024	0,0041	0,0102	0,0313	0	
n		0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k
		p												

Das Medikament „Grippeweg“ heilt Studien zufolge mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% eine an Grippe erkrankte Person innerhalb von einem Tag. In einem Krankenhaus wird das Medikament „Grippeweg“ zeitgleich an 5 mit Grippe erkrankte Patienten verabreicht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Patienten durch das Medikament am Folgetag geheilt sind? Ermittle die Wahrscheinlichkeit mithilfe des gegebenen Tafelwerks.

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also dass ein Grippepatient durch das Medikament geheilt wird, ist  $p = 0,96$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass von  $n = 5$  Grippepatienten **genau**  $k = 5$  mithilfe des Medikaments geheilt werden, durch Ablesen der entsprechenden Zelle ( $p$ -Spalte| $k$ -Zeile)  $\Rightarrow (0,96 | 5) \Rightarrow 0,8154$ :

$$B(5, 0,96, 5) = P(X = 5) = 0,8154$$

**Beispiel.**  $F(n, p, k)$  oder  $P(X \leq k)$ : Jede dritte Person leidet an einer Schlafstörung. In einer Studie werden 6 Personen zufällig ausgewählt und auf eine Schlafstörung untersucht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass **höchstens** eine Person eine Schlafstörung aufweist? Ermittle die Wahrscheinlichkeit mithilfe des gegebenen Tafelwerks.

Die Nutzung des Tafelwerks funktioniert nach demselben Schema wie beim vorherigen Beispiel ( $B(n, p, k)$  oder  $P(X = k)$ ) erläutert, bloß mit einem Unterschied. Befindet sich das gegebene  $p$  in der **unteren** Zeile, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für die Werte  $n$ ,  $p$  und  $k$ : 1 minus *abgelesener Wert* (in der zugehörigen Zelle).

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also eine Person weist eine Schlafstörung bei der Untersuchung auf, ist  $p = \frac{1}{3}$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass aus  $n = 6$  untersuchten Personen **höchstens**  $k = 1$  Person eine Schlafstörung hat, durch

Ablesen der entsprechenden **Zelle** ( $p$ -Spalte| $k$ -Zeile)  $\Rightarrow$  ( $\frac{1}{3}$  | 1)  $\Rightarrow$  0,3512:

$$F(6, \frac{1}{3}, 1) = P(X \leq 1) = 0,3512$$

*Kumulierte Binomialverteilung*

$F(n, p, k) = P(X \leq k) =$  *abgelesener Wert*

		p												
n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	n
6	0	0,8858	0,833	0,7828	0,7351	0,5314	0,3349	0,2621	0,178	0,1176	0,0878	0,0467	0,0156	5
	1	0,9943	0,9875	0,9784	0,9672	0,8857	0,7368	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,2333	0,1094	4
	2	0,9998	0,9995	0,9988	0,9978	0,9842	0,9377	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,5443	0,3438	3
	3				0,9999	0,9987	0,9913	0,983	0,9624	0,9295	0,8999	0,8208	0,6563	2
	4					0,9999	0,9993	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,959	0,8906	1
	5						0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9959	0,9844	0	
n		0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k

$F(n, p, k) = P(X \leq k) = 1 -$  *abgelesener Wert*

80% der deutschen Studenten besitzen ein Smartphone. In einer deutschlandweiten Umfrage werden 6 zufällig ausgewählte deutsche Studenten befragt, ob sie ein Smartphone besitzen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass **höchstens** 3 der befragten Studenten ein Smartphone besitzen?

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also dass ein befragter Student ein Smartphone besitzt, ist  $p = 0,8$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass von  $n = 6$  befragten Studenten **höchstens**  $k = 3$  ein Smartphone besitzen, durch Ablesen der entsprechenden **Zelle** ( $p$ -Spalte| $k$ -Zeile)  $\Rightarrow$  (0,8 | 3)  $\Rightarrow$  0,9011:

$$F(6, 0,8, 3) = P(X \leq 3) = 1 - 0,9011 = 0,0989$$

### 3.6.3 Erwartungswert

Für die Berechnung des Erwartungswerts  $\mu$  (auch  $E(X)$ ) bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von  $p$  gilt:

$$\mu = n \cdot p$$

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% sind untersuchte Krankenhauspatienten mit einem Grippevirus infiziert. Was ist der Erwartungswert, der mit einem Grippevirus infizierten Patienten, bei einer Untersuchung von 200 zufällig ausgewählten Patienten in

einem Krankenhaus?

Der Erwartungswert für eine Trefferwahrscheinlichkeit von  $p = 0,05$ , dass ein Krankenhauspatient am Grippevirus infiziert ist, bei der Untersuchung von  $n = 200$  zufällig ausgewählten Patienten in einem Krankenhaus ist:

$$\mu = 200 \cdot 0,05 = 10$$

### 3.6.4 Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt an, wie „weit“ die einzelnen  $X$ -Werte **im Durchschnitt** vom Erwartungswert  $\mu$  (auch  $E(X)$ ) „entfernt“ sind. Sie gibt uns also die **mittlere Abweichung** der Streuung um den Erwartungswert herum an. Für die Berechnung der Standardabweichung  $\sigma$  bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von  $p$  und der entsprechenden Nicht-Trefferwahrscheinlichkeit von  $q = 1 - p$  gilt:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

**Beispiel.** Nach Auswertung der Daten eines festinstallierten Blitzers begehen auf der zugehörigen Landstraße mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von  $100 \text{ km/h}$  15% aller vorbeifahrenden Fahrzeuge eine Geschwindigkeitsüberschreitung. Das örtliche Ordnungsamt beschließt: Liegt in einer anschließenden Stichprobe von 200 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Geschwindigkeitsüberschreitungen um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, bauen sie den Blitzer ab. Ab welcher Anzahl von Geschwindigkeitsüberschreitungen in der Stichprobe von 200 Messungen lässt das Ordnungsamt den Blitzer stehen?

Der Erwartungswert für eine Trefferwahrscheinlichkeit von  $p = 0,15$ , dass ein Fahrzeug bei der Messung die Geschwindigkeit überschreitet, in der Stichprobe von  $n = 200$  Messungen ist:

$$\mu = 200 \cdot 0,15 = 30$$

Die Standardabweichung für  $n = 200$ ,  $p = 0,15$  und  $q = 1 - p = 1 - 0,15 = 0,85$  ist:

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \approx 5,05$$

Zahl der Geschwindigkeitsüberschreitungen um eine Standardabweichung  $\sigma = 5,05$  unter dem Erwartungswert  $\mu = 30$  beträgt:  $\mu - \sigma = 30 - 5,05 = 24,95$

Somit lässt das Ordnungsamt ab der Anzahl von 25 Geschwindigkeitsüberschreitungen (es gibt nur **ganze** Überschreitungen) den Blitzer stehen.

### 3.7 Lagemaße und Streumaße von Stichproben

Um die Lage- und Streumaße einer Stichprobe zu bestimmen, werden zunächst die Daten der Stichprobe aufsteigend nach Werten **sortiert**, sofern die Stichprobe noch nicht sortiert vorliegt. Die Lagemaße geben Auskunft über die Verteilung der Stichprobe:

**Modus:** Der Modus ist der Wert, der **am häufigsten** in der Stichprobe vorkommt.

**Median:** Liegt bei einer Stichprobe eine ungerade Anzahl an Datenwerten vor, so ist der Median/Zentralwert der Wert, der **genau in der Mitte** (im Zentrum) der sortierten Stichprobe „steht“. Liegt bei einer Stichprobe eine gerade Anzahl an Datenwerten vor, so ist der Median der **Durchschnitt der beiden mittleren Werte** der sortierten Stichprobe (Berechnung:  $\frac{m_1+m_2}{2}$ ).

**Mittelwert:** Der Mittelwert  $\bar{x}$  (auch arithmetisches Mittel) ist der **Durchschnittswert** aller Datenwerte, die in der Stichprobe vorkommen. Für die Berechnung addiert man alle vorhandenen Datenwerte der Stichprobe ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) und teilt diese Summe durch die Gesamtanzahl  $n$  aller Datenwerte in der Stichprobe.

$$\text{Mittelwert} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Die Streumaße geben Auskunft darüber, wie stark die Datenwerte einer Stichprobe um ihren Mittelwert streuen/wie „weit“ sie durchschnittlich von dem Mittelwert „entfernt“ sind:

**Varianz:** Die Varianz  $V$  gibt die **durchschnittliche** quadratische Abweichung vom Mittelwert  $\bar{x}$  der Stichprobe an. Die Berechnung erfolgt mit  $\bar{x}$ , allen vorhandenen Datenwerten der Stichprobe ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) und der Gesamtanzahl  $n$  aller Datenwerte folgendermaßen:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

**Standardabweichung:** Die Standardabweichung  $s$  gibt an, wie „weit“ die einzelnen Datenwerte der Stichprobe **im Durchschnitt** vom Mittelwert  $\bar{x}$  „entfernt“ sind. Die Standardabweichung  $s$  erhält man, indem man von der Varianz  $V$  die Wurzel zieht.

$$s = \sqrt{V} \quad \Rightarrow \quad \text{somit ist die Varianz andersrum } V = s^2$$

**Beispiel.** In einer Straßenumfrage werden 6 Passanten nach ihrem Kontostand gefragt, wobei sie in ihrer Angabe auf Tausender runden sollen. Die Passanten geben folgende Kontostände an:  $P_1 = 2000$  Euro,  $P_2 = 7000$  Euro,  $P_3 = 0$  Euro,  $P_4 = 2000$  Euro,  $P_5 = 45000$  Euro und  $P_6 = 8000$  Euro (Urliste). Bestimmen Sie Modus, Median, Mittelwert, Varianz und die Standardabweichung dieser Stichprobe.

Da insgesamt 6 Passanten in der Stichprobe befragt wurden, ist der Stichprobenumfang/Gesamtzahl aller Datenwerte  $n = 6$ . Zunächst werden die Kontostände aufsteigend sortiert.

Sortierte Stichprobe (Rangliste):  $\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{2000}_{x_2}, \underbrace{2000}_{x_3}, \underbrace{7000}_{x_4}, \underbrace{8000}_{x_5}, \underbrace{45000}_{x_6}$

Man kann auch eine Verteilungstabelle anfertigen:

Kontostand (in Euro)	0	2000	7000	8000	45000
Anzahl	1	2	1	1	1

Da der Wert 2000 in dieser Stichprobe am häufigsten vorkommt, ist der Modus = 2000.

Da eine gerade Anzahl an Datenwerten ( $n = 6$ ) vorliegt, ist der Median der Durchschnitt der beiden mittleren Werte der sortierten Stichprobe. Bei insgesamt  $n = 6$  Werten befinden sich die beiden mittleren Werte an den Stellen  $x_3$  und  $x_4$ , weshalb:

$$\text{Median} = \frac{2000 + 7000}{2} = 4500$$

$$\text{Mittelwert} = \bar{x} = \frac{0 + 2000 + 2000 + 7000 + 8000 + 45000}{6} \approx 10666,67$$

Im Durchschnitt besitzt einer der 6 befragten Passanten somit 10666,67 Euro.

Für die Varianz  $V$  ergibt sich durch die Formel:

$$V = \frac{(0-10666,67)^2 + (2000-10666,67)^2 + (2000-10666,67)^2 + (7000-10666,67)^2 + (8000-10666,67)^2 + (45000-10666,67)^2}{6}$$

$$= 243888888,9$$

Somit ist die Standardabweichung  $s = \sqrt{V} = \sqrt{243888888,9} = 15616,94$

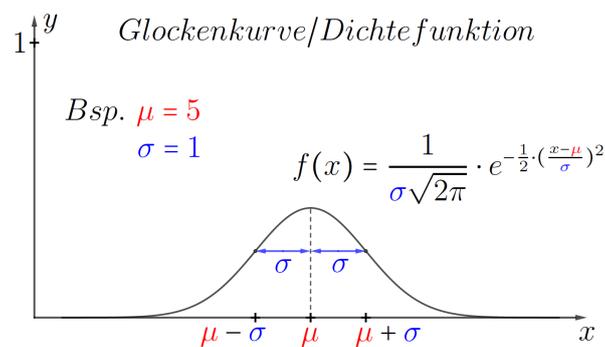
### 3.8 Normalverteilung/Gaußverteilung

Die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  oder auch Gaußverteilung genannt, ist eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen, da sehr viele Größen (wie Körpergröße eines Geschlechts, Gewicht, Schulnoten, usw.) in unserer „Welt/Natur“ normalverteilt auftreten. Ist eine Zufallsgröße  $X$  normalverteilt bedeutet das:

- Die Zufallsgröße  $X$  besitzt einen **Erwartungswert**  $\mu$ , der durchschnittlich am häufigsten/wahrscheinlichsten auftritt (z.B.  $X$  = männliche Körpergröße in Deutschland:  $\mu = 180\text{cm}$ )
- Die Zufallsgröße  $X$  besitzt eine **Standardabweichung**  $\sigma$ , die die durchschnittliche Streuung/„Entfernung“ um den **Erwartungswert**  $\mu$  angibt (z.B. beträgt bei der männlichen Körpergröße in Deutschland die mittlere Streuung/„Entfernung“  $\sigma = 10\text{cm}$  um den Erwartungswert  $\mu = 180\text{cm}$ )
- Wie „dicht“ die möglichen  $x$ -Werte, die die Zufallsgröße  $X$  annehmen kann, beieinander liegen, wird **immer** durch folgende Dichtefunktion beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Diese Dichtefunktion  $f$  der Normalverteilung hat im Schaubild **immer** die charakteristische Form einer symmetrischen Glocke, weshalb sie auch oft als Glockenkurve bezeichnet wird. Der wahrscheinlichste/häufigste  $x$ -Wert  $\mu$  (**Erwartungswert**) befindet sich im Schaubild der Glockenkurve  $f$  logischerweise beim Hochpunkt der „Glocke“/Kurve. Geht man vom **Erwartungswert**  $\mu$  aus eine Länge der **Standardabweichung**  $\sigma$  sowohl in positive, als auch in negative  $x$ -Richtung, dann landet man auf der Glockenkurve  $f$  in den beiden steilsten Stellen (den beiden Wendepunkten) von  $f$ .



**Hinweis:** Hat die Normalverteilung die Werte  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ , so wird sie auch als **Standardnormalverteilung**  $N(0, 1)$  bezeichnet.

### 3.8.1 Verteilungsfunktion - Integralfunktion

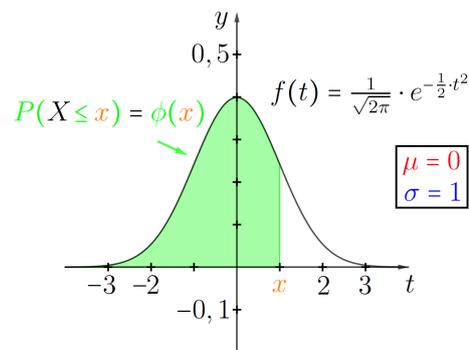
Die Wahrscheinlichkeiten/prozentuale Häufigkeiten  $P$ , dass eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  (z.B. weibliche Körpergröße) bestimmte  $x$ -Werte(bereiche) annimmt (z.B. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau zwischen 155 - 175cm groß ist/Wie viele Frauen sind insgesamt prozentual zwischen 155 - 175cm groß?  $\Rightarrow P(155 \leq X \leq 175)$ ?), werden mithilfe der Verteilungsfunktion  $\phi$  der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$  ( $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ ) berechnet.

Die Verteilungsfunktion  $\phi(x)$  der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$  berechnet **immer** das **Integral** der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-0}{1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

mit der unteren Grenze  $-\infty$  bis zur oberen Grenze  $x$ .

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$$



$\phi(x)$  liefert damit **immer** eine Antwort auf die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit  $P$  ist, dass die **standardnormalverteilte** Zufallsgröße  $X$  **höchstens** den Wert  $x$  annimmt.

$$P(X \leq x) \Rightarrow \text{„höchstens Wert } x\text{“}$$

**Jede** normalverteilte Zufallsgröße  $X$  lässt sich durch eine Transformation „standardisieren“, d.h. in eine Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$  transformieren/überführen. Dafür wird folgender Wert, mithilfe von  $x$ ,  $\mu$  und  $\sigma$ , berechnet und in die Funktion  $\phi(\ )$  eingesetzt:

$$\frac{x - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\text{Einsetzen}} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(X \leq x)$$

Somit kann durch die Transformation/„Standardisierung“ für **jede** normalverteilte Zufallsgröße  $X$  ( $N(\mu, \sigma)$ ) die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass  $X$  **höchstens** den Wert  $x$  annimmt, mithilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(x)$  der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$  bestimmt werden.

Da die „komplette“ Fläche unterhalb der Dichtefunktion  $f(x)$  den Wert 1 hat, also das **Integral** von  $f(x)$  mit der unteren Grenze  $-\infty$  bis zur oberen Grenze  $\infty$  gleich 1 ist, ist somit

$$\phi(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt = 1 = P(X \leq \infty)$$

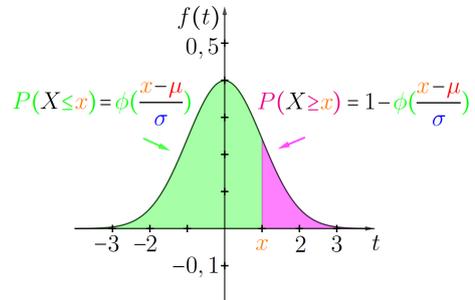
$\Rightarrow$  die Wahrscheinlichkeit  $P$  kann den Wert 1 (100%) nicht übersteigen!

Deshalb kann mithilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(x)$  auch die Wahrscheinlichkeit  $P$  bestimmt werden, dass eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  **mindestens** den Wert  $x$  annimmt.

$$P(X \geq x) \Rightarrow \text{„mindestens Wert } x\text{“}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq x)$  beschreibt die „rechte“ **Fläche**. Diese **Fläche** lässt sich berechnen, indem die „linke“ **Fläche** ( $\Rightarrow P(X \leq x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ ) von der „kompletten“ Fläche ( $\Rightarrow = 1$ ) subtrahiert wird. Somit ist für **jede** normalverteilte Zufallsgröße  $X (N(\mu, \sigma))$  mithilfe der Transformation

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

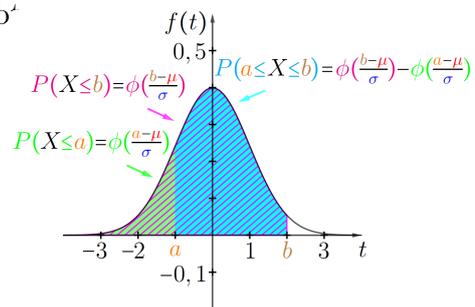


Zudem kann auch mithilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(x)$  die Wahrscheinlichkeit  $P$  bestimmt werden, dass eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  **zwischen** den Werten  $a$  und  $b$  liegt, also die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass  $X$  *mindestens* den Wert  $a$  und *höchstens* den Wert  $b$  annimmt.

$$P(a \leq X \leq b) \Rightarrow \text{„zwischen Wert } a \text{ und } b\text{“}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  beschreibt die **Fläche** zwischen dem Wert  $a$  und dem Wert  $b$ . Diese **Fläche** lässt sich berechnen, indem die „linke“ **Fläche** bis zum Wert  $a$  ( $\Rightarrow P(X \leq a) = \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ ) von der „gestreiften“ **Fläche** bis zum Wert  $b$  ( $\Rightarrow P(X \leq b) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$ ) subtrahiert wird. Somit ist für **jede** normalverteilte Zufallsgröße  $X (N(\mu, \sigma))$  mithilfe der Transformation

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



Rechenbeispiele zu den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten folgen im nächsten Kapitel.

### 3.8.2 Stochastisches Tafelwerk, Tabelle-Standardnormalverteilung ( $\phi$ )

Das stochastische Tafelwerk, als eine Tabelle der Standardnormalverteilung  $N(0, 1)$ , dient als Hilfsmittel um Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq x) = \phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$  einer normalverteilten Zufallsgröße  $X (N(\mu, \sigma))$  für verschiedene Werte von  $x$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  abzulesen.

Da das Tafelwerk **nur** die Wahrscheinlichkeiten für **höchstens** den Wert  $x$  ( $P(X \leq x)$ ) **der Standardnormalverteilung mit der Funktion  $\phi$**  angibt, wird **zunächst immer** eine Transformation des Werts  $x$  mit  $\mu$  und  $\sigma$  durchgeführt ( $\frac{x-\mu}{\sigma}$ ). Dieser „transformierte/standardisierte“ Wert  $\frac{x-\mu}{\sigma}$  kann in  $\phi(\ )$  eingesetzt werden und liefert somit die,

im Tafelwerk abzulesenden, Wahrscheinlichkeiten. Es folgt ein Beispiel zu den 3 Wahrscheinlichkeiten

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \text{„höchstens Wert } x\text{“}$$

$$P(X \geq x) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \text{„mindestens Wert } x\text{“}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \Rightarrow \text{„zwischen Wert } a \text{ und } b\text{“}$$

**Beispiel.** Die Auswertung einer landesweiten Straßenumfrage über die Körpergröße bei deutschen Frauen hat ergeben, dass der Durchschnittswert bei  $165\text{cm}$  liegt und die Körpergröße  $X$  als normalverteilt angenommen werden kann mit der Standardabweichung  $7\text{cm}$ .

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Frau kleiner als  $157\text{cm}$  ist? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie größer als  $165\text{cm}$  ist?

b) Wieviel Prozent der zufällig befragten Frauen sind zwischen  $152\text{cm}$  und  $182\text{cm}$  groß?

c) Welche Größe hat eine Frau, wenn nur 10% aller Frauen kleiner sind als sie?

Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass die Körpergröße  $X$  normalverteilt mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7$  ist.

Die Nutzung des Tafelwerks funktioniert folgendermaßen. Hat man die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P$  definiert, wird zunächst eine Transformation des in der Aufgabenstellung gefragten Werts  $x$  mit  $\mu$  und  $\sigma$  durchgeführt ( $\frac{x - \mu}{\sigma}$ ). Danach kann mithilfe der Funktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung und dem transformierten Wert  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P$  mit dem Tafelwerk ermittelt werden. In der Spalte ganz links stehen **die möglichen erste Vor- und erste Nachkommastellen** des transformierten Werts  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  aufsteigend von  $0,0 \dots \text{max. } 4,0$ . In der obersten Zeile stehen **die möglichen zweite Nachkommastellen** des transformierten Werts  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  aufsteigend von  $0 \dots 9$ .

Um die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$  für bestimmte Werte für  $x$ ,  $\mu$  und  $\sigma$  abzulesen, sucht man zunächst die Zeile, in der die **erste Vor- und erste Nachkommastelle** des berechneten  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  sich befindet. Hat man die Zeile gefunden, sucht man dort die Spalte, in der die **zweite Nachkommastelle** des berechneten  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  sich befindet. Diejenige Zelle mit der entsprechenden Zeile und Spalte gibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit an.

**Hinweis:** Im Tafelwerk können nur positive Werte für  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  abgelesen werden. Falls der Wert  $\frac{x - \mu}{\sigma}$  **negativ** sein sollte, so gilt wegen der Symmetrie der Funktion  $\Phi$ :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei **negativem**  $\frac{x - \mu}{\sigma}$ : **1 - abgelesener Wert**.

Funktionswerte der Standardnormalverteilung  $\phi(x)$ 

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

a) Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  kleiner als/höchstens  $157\text{cm}$  ist, ergibt sich nach Transformieren des Wertes  $x = 157$  mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7 \Rightarrow \frac{157-165}{7} = -1,14 \Rightarrow \phi(-1,14) = 1 - \phi(1,14)$ , durch Ablesen der entsprechenden Zelle (Zeile: 1,1 | Spalte: 4)  $\Rightarrow 0,8729$

$$P(X \leq 157) = \phi\left(\frac{157 - 165}{7}\right) = \phi(-1,14) = 1 - \phi(1,14) = 1 - 0,8729 = 0,1271$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  größer als/**mindestens**  $165\text{cm}$  ist, ergibt sich nach Transformieren des Wertes  $x = 165$  mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7 \Rightarrow \frac{165-165}{7} = 0 \Rightarrow \phi(0,00)$ , durch Ablesen der entsprechenden **Zelle** (Zeile: **0,0** | Spalte: **0**)  $\Rightarrow$  **0,5**

$$P(X \geq 165) = \phi\left(\frac{165 - 165}{7}\right) = \mathbf{0,500}$$

b) Für die gesuchte prozentuale Häufigkeit, dass  $X$  **zwischen**  $152\text{cm}$  und  $182\text{cm}$  ist, ergibt sich nach Transformieren der beiden Werte  $a = 152$  mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7 \Rightarrow \frac{152-165}{7} = -1,86 \Rightarrow \phi(-1,86) = 1 - \phi(1,86)$ , durch Ablesen der entsprechenden **Zelle** (Zeile: **1,8** | Spalte: **6**)  $\Rightarrow$  **0,9686** und  $b = 182$  mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7 \Rightarrow \frac{182-165}{7} = 2,43 \Rightarrow \phi(2,43)$ , durch Ablesen der entsprechenden **Zelle** (Zeile: **2,4** | Spalte: **3**)  $\Rightarrow$  **0,9925**

$$P(152 \leq X \leq 182) = \phi\left(\frac{182 - 165}{7}\right) - \phi\left(\frac{152 - 165}{7}\right)$$

$$= \phi(2,43) - \phi(-1,86) = \phi(2,43) - (1 - \phi(1,86)) = \mathbf{0,9925} - (1 - \mathbf{0,9686}) = \mathbf{0,9611}$$

Antwort: 96,11% der zufällig befragten Frauen sind **zwischen**  $152\text{cm}$  und  $182\text{cm}$  groß.

c) Für die gesuchte Körpergröße  $k$  einer Frau, sodass  $P = 10\%$  aller Frauen kleiner als/**höchstens** so groß sind wie sie, gilt entsprechend

$$P(X \leq k) = 0,1$$

Somit ist also wegen der Transformation das  $x = \frac{k-165}{7}$ , gesucht, für das  $\phi(x) = 0,1$  ist. Ein Blick in die Tabelle der Standardnormalverteilung zeigt, dass dort nur Werte von 0,5 und größer angegeben sind. In diesem Fall geht man den Weg über die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - P(X \leq k) = 0,9$ . Gesucht ist also das  $x = \frac{k-165}{7}$  für das

$1 - \phi(x) = 0,9$  ist. Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung ist

$1 - \phi(x) = \phi(-x)$ . Gesucht ist also  $x = \frac{k-165}{7}$  mit  $\phi(-x) = 0,9$ .

Für den Wert **0,9** liefert die entsprechende **Zelle** im Tafelwerk, durch Ablesen der zugehörigen Zeile: **1,2** und Spalte: **8**, den  $x$ -Wert mit  $-x = \mathbf{1,28} \Rightarrow x = -1,28$ .

Somit ergibt sich für die gesuchte Größe  $k$ :

$$x = -1,28 = \frac{k - 165}{7} \Rightarrow k = \mathbf{156,04}$$

Antwort: 10% aller Frauen sind kleiner als/**höchstens**  $156,04\text{cm}$  groß.

### 3.8.3 Sigma-Regeln - Normalverteilung

Die **Standardabweichung  $\sigma$**  (**Sigma**) gibt die durchschnittliche Streuung um den **Erwartungswert  $\mu$**  an. Sie gibt also an, „wie weit entfernt“ im Durchschnitt alle Werte der Stichprobe einer Zufallsgröße  $X$  von dem **Erwartungswert  $\mu$**  liegen, wie weit sie im Durchschnitt um den **Erwartungswert  $\mu$**  „streuen“.

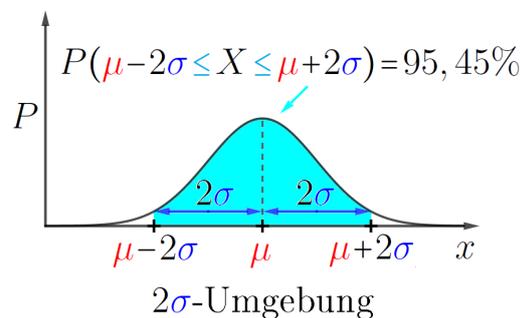
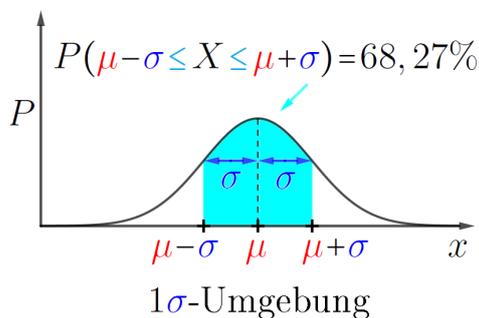
Die  $\sigma$ -Umgebung, ist die **symmetrische Umgebung** um den **Erwartungswert  $\mu$**  mit dem „Radius“  $\sigma$ . Sie beinhaltet also den  $x$ -Wertebereich/das Intervall von  $\mu - \sigma$  bis  $\mu + \sigma$ . Der „Radius“ der Umgebungen kann auch als ein Vielfaches von  $\sigma$  angegeben werden:

$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	$\rightarrow$	$1\sigma$ -Umgebung
$[\mu - 1,64\sigma, \mu + 1,64\sigma]$	$\rightarrow$	$1,64\sigma$ -Umgebung
$[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$	$\rightarrow$	$1,96\sigma$ -Umgebung
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	$\rightarrow$	$2\sigma$ -Umgebung
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	$\rightarrow$	$3\sigma$ -Umgebung

Für **jede normalverteilte** Zufallsgröße  $X$  liefern die sogenannten Sigma-Regeln eine Antwort auf die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit  $P$  ist, dass die Zufallsgröße  $X$  einen Wert aus der jeweiligen  $\sigma$ -Umgebung annimmt. Also bspw. bei der  $1\sigma$ -Umgebung: Wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass  $X$  **zwischen** den Werten  $\mu - \sigma$  und  $\mu + \sigma$  liegt. Das Besondere daran ist, dass diese Wahrscheinlichkeiten/prozentuale Häufigkeiten  $P$  für **jede normalverteilte** Zufallsgröße  $X$  **immer dieselben** sind!

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$	$= 68,27\%$	$\rightarrow$	$P(\text{„}1\sigma\text{-Umgebung“})$
$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma)$	$= 90\%$	$\rightarrow$	$P(\text{„}1,64\sigma\text{-Umgebung“})$
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma)$	$= 95\%$	$\rightarrow$	$P(\text{„}1,96\sigma\text{-Umgebung“})$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$	$= 95,45\%$	$\rightarrow$	$P(\text{„}2\sigma\text{-Umgebung“})$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$	$= 99,73\%$	$\rightarrow$	$P(\text{„}3\sigma\text{-Umgebung“})$

Graphisch stellt sich die jeweilige Wahrscheinlichkeit  $P$  als „**symmetrische Fläche**“ unter der jeweiligen Dichtefunktion/Glockenkurve der normalverteilten Zufallsgröße  $X$  dar.



**Beispiel.** Die Auswertung einer landesweiten Straßenumfrage über die Körpergröße bei deutschen Frauen hat ergeben, dass der Durchschnittswert bei  $165\text{cm}$  liegt und die Körpergröße  $X$  als normalverteilt angenommen werden kann mit der Standardabweichung  $7\text{cm}$ . In welchem Bereich liegen die Werte von  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $68,3\%$ ? Und in welchem Bereich liegen die Werte von  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $95,5\%$ ?

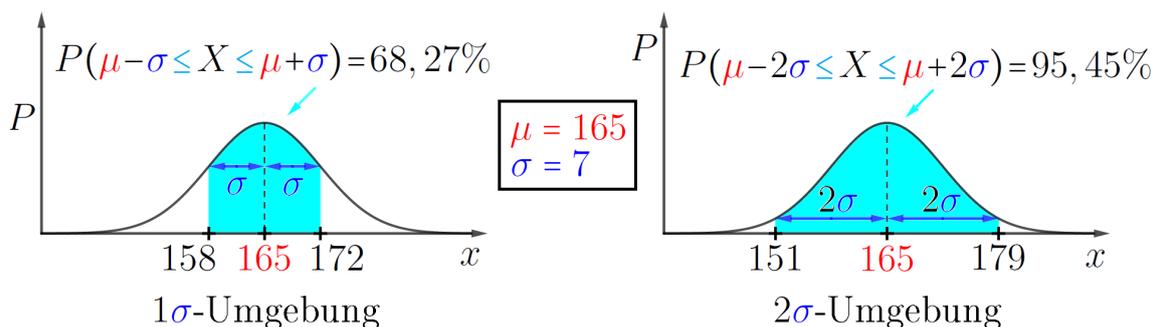
Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass die Körpergröße  $X$  normalverteilt mit  $\mu = 165$  und  $\sigma = 7$  ist.

Da wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeit  $P$  für die  $1\sigma$ -Umgebung ca.  $68,3\%$  beträgt und für die  $2\sigma$ -Umgebung ca.  $95,5\%$  ist, entsprechen die gesuchten Bereiche der  $1\sigma$ -Umgebung und der  $2\sigma$ -Umgebung.

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68,27\% \approx 68,3\% = P(165 - 7 \leq X \leq 165 + 7) = P(158 \leq X \leq 172)$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,45\% \approx 95,5\% = P(165 - 2 \cdot 7 \leq X \leq 165 + 2 \cdot 7) = P(151 \leq X \leq 179)$$

Antwort: Mit einer Wahrscheinlichkeit von  $68,3\%$  liegen die Werte der Körpergröße  $X$  einer deutschen Frau im Bereich  $I = [158\text{cm}, 172\text{cm}]$  und mit einer Wahrscheinlichkeit von  $95,5\%$  im Bereich  $I = [151\text{cm}, 179\text{cm}]$ .



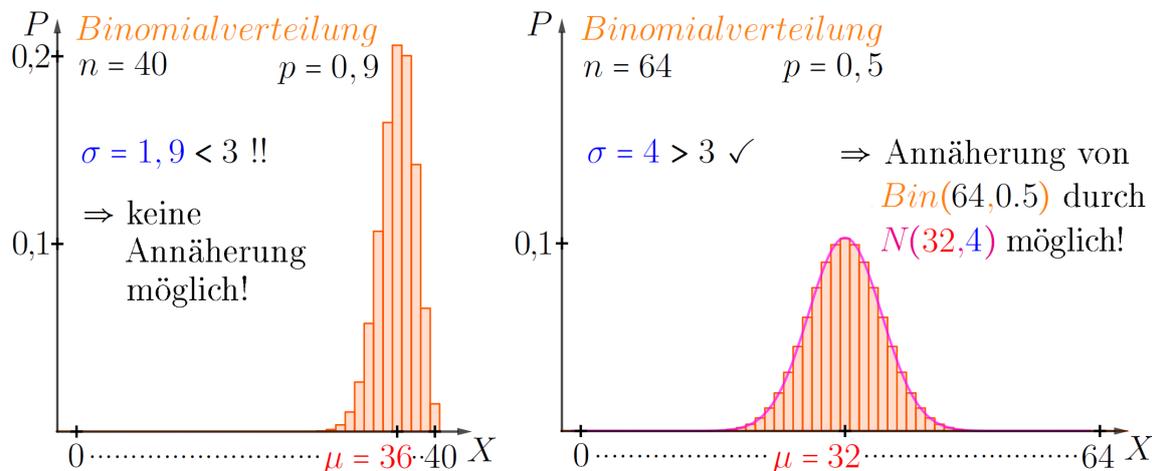
### 3.8.4 Laplace Bedingung

Wenn die Streuung/Standardabweichung  $\sigma$  einer binomialverteilten Zufallsvariable  $X$  um ihren Erwartungswert  $\mu$  groß genug ist, so kann diese Binomialverteilung  $B(n, p)$  durch die Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  angenähert werden.

$$\text{Laplace-Bedingung: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$$

**Hinweis:** Ist diese Laplace Bedingung erfüllt, so kann die Binomialverteilung  $B(n, p)$  durch die zugehörige Normalverteilung  $N(\mu = n \cdot p, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)})$  angenähert werden. Anschließend können Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Normalverteilungstabelle berechnet werden oder auch die Sigma-Regeln angewendet werden.

Graphisch sieht die mögliche Annäherung folgendermaßen aus. Ist die Laplace-Bedingung erfüllt, so ist die Binomialverteilung **symmetrisch** zum Erwartungswert  $\mu$ .



**Beispiel.** Eine Münze wird 64-mal hintereinander geworfen. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl der Münzwürfe, die Zahl ergaben. In welchem Bereich liegen die Werte von  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5%?

Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass die Zufallsgröße  $X$  binomialverteilt ist mit  $n = 64$  und  $p = 0,5$ , da es sich beim Münzwurf um ein Bernoulli-Experiment handelt mit genau zwei möglichen Versuchsausgängen (Zahl und Kopf).

1. Ist die Laplace-Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{64 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 4 > 3$$

Die Laplace-Bedingung ist erfüllt. Somit kann die Binomialverteilung  $Bin(64, 0.5)$  durch die Normalverteilung  $N(32, 4)$  angenähert werden ( $\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0,5 = 32$ ) und die Sigma-Regeln können angewendet werden.

2. Ist der gesuchte Wertebereich möglicherweise eine  $\sigma$ -Umgebung?

Da wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeit  $P$  für die  $2\sigma$ -Umgebung ca. 95,5% ist, entspricht der gesuchte Bereiche der  $2\sigma$ -Umgebung.

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,45\% \approx 95,5\% = P(32 - 2 \cdot 4 \leq X \leq 32 + 2 \cdot 4) = P(24 \leq X \leq 40)$$

Antwort: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% liegt  $X$  (die Anzahl des Auftretens von Zahl) bei 64 Münzwürfen im Bereich  $I = [24, 40]$ .

### 3.9 Schätzen von Parametern ( $\mu$ , $p$ ) der Binomial- und Normalverteilung

Beim statistischen Schätzen werden anhand einer Stichprobe, Aussagen über die Grundgesamtheit (Allgemeinheit) getroffen. Im Folgenden betrachten wir binomialverteilte und normalverteilte Zufallsgrößen  $X$  und treffen, anhand der Ergebnisse einer berücksichtigten Stichprobe, Aussagen über die in Wahrheit (auf die Grundgesamtheit/Allgemeinheit bezogen) vorliegende Binomialverteilung (oder Normalverteilung) mit den zugehörigen „wahren“ Parameterwerten  $\mu_w$  („wahrer“ Erwartungswert) und  $p_w$  („wahre“ Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil).

Beispielsweise könnte eine Umfrage, ob Großeltern Brillenträger sind, ergeben, dass in einer Stichprobe von 100 zufällig ausgewählten Großeltern, 65 angeben eine Brille zu tragen. Die binomialverteilte Zufallsgröße  $X$  beschreibt hier die Anzahl der Brillenträger unter den 100 Großeltern. Mit dem Ergebnis der Stichprobe (65 von 100 tragen Brille) können nun Schätzungen für die in Wahrheit (auf die Grundgesamtheit/ALLE Großeltern bezogen) vorliegende Binomialverteilung abgegeben werden, also Schätzungen für den „wahren“ Erwartungswert  $\mu_w$  und die „wahre“ Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_w$  (dass ein Großelternanteil angibt Brillenträger zu sein).

Ein weiteres Beispiel wäre eine Befragung zu der Körpergröße erwachsener Männer, wofür die Angaben von 200 zufällig ausgewählten erwachsenen Männern als Stichprobe berücksichtigt werden. Die normalverteilte Zufallsgröße  $X$  beschreibt hier die Körpergröße eines erwachsenen Mannes. Mit dem Ergebnis der Stichprobe können nun Schätzungen für die in Wahrheit (auf die Grundgesamtheit/ALLE erwachsenen Männer bezogen) vorliegende Normalverteilung abgegeben werden, also Schätzungen für den „wahren“ Erwartungswert  $\mu_w$  oder auch die „wahre“ Standardabweichung  $\sigma_w$ .

Anders als bisher ist nun keine Binomialverteilung (oder Normalverteilung) gegeben, mit der bestimmte Wahrscheinlichkeiten berechnet werden sollen, sondern es ist eine Stichprobe und deren Auswertungsergebnis gegeben, anhand dessen eine Schätzung abgegeben werden soll, wie die in Wahrheit (auf ALLE/Grundgesamtheit bezogen) zugehörige Binomialverteilung (oder Normalverteilung) aussehen könnte.

#### 3.9.1 Konfidenzintervall und Konfidenzniveau

Da man bei statistischen Schätzungen „nur“ eine Stichprobe berücksichtigt und diese nicht in jedem Fall repräsentativ ist, also nicht in jedem Fall die Wahrheit/Grundgesamtheit/Allgemeinheit repräsentiert/widerspiegelt, versucht man mit einer bestimmten „Sicherheit/Zuversicht“ Aussagen über die in Wahrheit (auf die Grundgesamtheit/ALLE bezogen) vorliegende Verteilung und ihre zugehörigen „wahren“ Parameter (z.B.  $\mu_w$ ,  $p_w$ ) zu treffen.

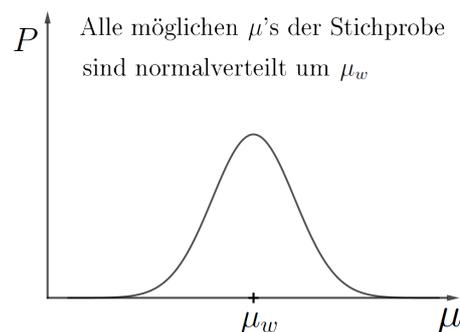
**Konfidenzintervall und Konfidenzniveau:** Aus den Ergebnissen einer Stichprobe werden bestimmte Bereiche/Konfidenzintervalle (Vertrauensintervalle) für die Schätzung der „wahren“ Parameter (z.B.  $\mu_w$ ,  $p_w$ ) abgeleitet/angegeben, bei denen man mit einer gewissen Sicherheit/Konfidenzniveau  $\gamma$  zuversichtlich ist, dass diese Bereiche/Konfidenzintervalle den „wahren“ (auf die Grundgesamtheit/ALLE bezogen) Wert des zu schätzenden Parameters (z.B.  $\mu_w$ ,  $p_w$ ) abdecken/ beinhalten. (engl. confident = zuversichtlich)

**Beispiel.** Es wurden 1000 erwachsene Männer zu ihrer Körpergröße befragt. Nach Auswertung der Stichprobe kann eine Normalverteilung angenommen werden und wir sind zu 95% (Konfidenzniveau  $\gamma = 0,95$ ) zuversichtlich, dass der „wahre“ Erwartungswert  $\mu_w$  im Bereich zwischen  $166\text{cm}$  und  $194\text{cm}$  (Konfidenzintervall =  $[166\text{cm}, 194\text{cm}]$ ) liegt.

### 3.9.2 Erwartungswert $\mu$ schätzen

Aus einer gegebenen Stichprobe lässt sich ein Erwartungswert  $\mu$  (z.B. die in der Stichprobe vorliegende „Trefferanzahl“ bei einer Binomialverteilung oder der Mittelwert/ arithmetisches Mittel  $\bar{x}$ ) sowie eine Standardabweichung  $\sigma$  bestimmen. Dieses  $\mu$  stellt eine erste Schätzung für den „wahren“ (auf die Grundgesamtheit/Allgemeinheit bezogen) Erwartungswert  $\mu_w$  dar. Um einen Bereich/Konfidenzintervall für den „wahren“ Erwartungswert  $\mu_w$  mit einer gewissen Sicherheit/Konfidenzniveau  $\gamma$  aus einer Stichprobe abzuleiten/zu bestimmen, macht man sich die Symmetrie der Normalverteilung zunutze.

Ab einer gewissen Stichprobengröße (ca. ab  $n \geq 30$ ) oder sobald die Laplace Bedingung ( $\sigma > 3$ ) bei einer vorliegenden Binomialverteilung erfüllt ist, **sind die möglichen Erwartungswerte  $\mu$ , die die vorliegende Stichprobe aufweisen kann, annähernd normalverteilt** (Laut zentralem Grenzwertsatz). Fürs Verständnis heißt das: Wenn man sehr oft (z.B. 1000mal) aus derselben Grundgesamtheit Stichproben entnimmt und sich immer das Ergebnis des Erwartungswerts  $\mu$  der jeweiligen Stichprobe notiert (z.B. alle Mittelwerte), dann folgen diese notierten Erwartungswerte  $\mu$  für sich gesehen einer Normalverteilung um den „wahren“ (auf die Grundgesamtheit/Allgemeinheit bezogen) Erwartungswert  $\mu_w$



Durch die Sigma-Regeln kennen wir bestimmte Bereiche/Intervalle ( $\sigma$ -Umgebungen), die bestimmte Wahrscheinlichkeiten in der Normalverteilung annehmen. Diese Information der Wahrscheinlichkeiten wird auf die Konfidenzniveaus  $\gamma$  übertragen und die zugehörigen Konfidenzintervalle entsprechen der jeweiligen  $\sigma$ - Umgebung.  $\mu$  ist dabei der Erwartungswert und  $\sigma$  die zugehörige Standardabweichung, die in der gegebenen Stichprobe vorliegen (also die erste Schätzung für den „wahren“ Erwartungswert  $\mu_w$ ).

Konfidenzintervall für $\mu_w$	Konfidenzniveau $\gamma$
$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	68,4%
$[\mu - 1,64\sigma, \mu + 1,64\sigma]$	90%
$[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$	95%
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	95,5%
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	99,7%
$[\mu - z\sigma, \mu + z\sigma]$	?

Unterscheidet sich das geforderte Konfidenzniveau  $\gamma$  von den oben gegebenen, so muss  $z$  in dem Konfidenzintervall ( $\sigma$ -Umgebung) so bestimmt werden, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\phi(z) = \frac{1 + \gamma}{2}$$

Das gesuchte  $z$  wird also durch „Rückwärtslesen“ aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ermittelt.

**Hinweis:** Liegt eine Binomialverteilung vor, wird zunächst mit der Laplace Bedingung geprüft, ob diese Binomialverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden kann. Anschließend kann das gesuchte Konfidenzintervall zu einem bestimmten Konfidenzniveau  $\gamma$  mithilfe der zugehörigen  $\sigma$ -Umgebung berechnet werden. Sollten Dezimalwerte (Kommazahlen) für die untere oder obere Grenze des Konfidenzintervalls herauskommen, so wird bei der Binomialverteilung **immer nach außen gerundet**, d.h. die untere Grenze wird immer abgerundet und die obere Grenze wird immer aufgerundet.

**Beispiel.** In einer Umfrage gaben 30 von 100 zufällig befragten Kindern an, ein Instrument zu spielen. Wie lautet das 99%-Konfidenzintervall für die Anzahl der Kinder, die ein Instrument spielen?

1. Liegt eine Binomialverteilung vor?

Es liegt eine Binomialverteilung mit den beiden Ergebnismöglichkeiten („Kind spielt ein Instrument“ | „Kind spielt kein Instrument“)  $\Rightarrow$  („Treffer“ | „Nicht-Treffer“) vor. Die Stichprobenlänge beträgt  $n = 100$ . Aus der Stichprobe entnehmen wir als erste Schätzung für die Anzahl der instrumentspielenden Kinder  $\mu = 30$  und schätzen die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil  $p$ , dass ein befragtes Kind ein Instrument spielt/prozentualer Anteil instrumentspielender Kinder, anhand der Stichprobe auf  $p = \frac{\mu}{n} = \frac{30}{100} = 0,3$ . ( $\Rightarrow \mu = n \cdot p \quad | : n$ )

2. Ist die Laplace Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7} \approx 4,58 > 3 \quad \checkmark$$

3. Kennen wir das zum Konfidenzniveau  $\gamma = 99\%$  zugehörige Konfidenzintervall, oder muss zunächst  $z$  bestimmt werden?

Da das geforderte Konfidenzniveau  $\gamma = 99\%$  sich von denen in der obigen Tabelle gegebenen unterscheidet, muss  $z$  in dem Konfidenzintervall ( $\sigma$ - Umgebung) so bestimmt werden, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

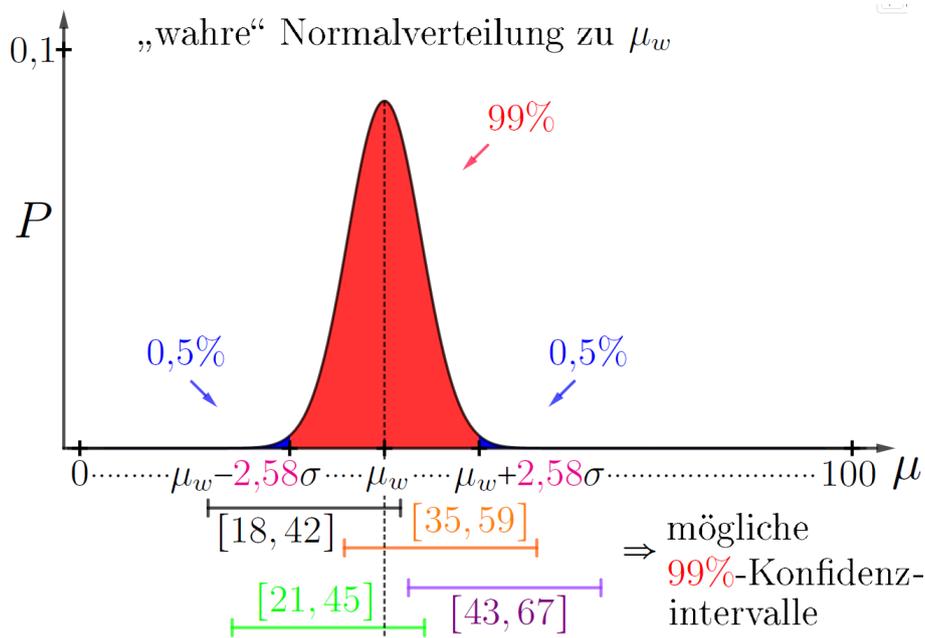
$$\phi(z) = \frac{1 + \gamma}{2} = \frac{1 + 0,99}{2} = 0,995$$

Durch „Rückwärtslesen“ aus der Tabelle der Standardnormalverteilung erhält man für  $z = 2,58$ , dass  $\phi(2,58) = 0,995$  ist.

4. Aufstellen des gesuchten 99%-Konfidenzintervalls für die Anzahl instrumentspielender Kinder:

$$[\mu - z\sigma, \mu + z\sigma] = [30 - 2,58 \cdot 4,58, 30 + 2,58 \cdot 4,58] = [18,18, 41,82] \xrightarrow{\text{nach aussen runden}} [18, 42]$$

Antwort: Mit einer Sicherheit/Konfidenzniveau  $\gamma = 99\%$  sind wir zuversichtlich, dass der „wahre“ Erwartungswert  $\mu_w$  („wahre“ Anzahl an instrumentspielenden Kindern von insgesamt 100 Kindern (auf die Grundgesamtheit/ALLE Kinder bezogen)) sich im Konfidenzintervall  $[18, 42]$  befindet.



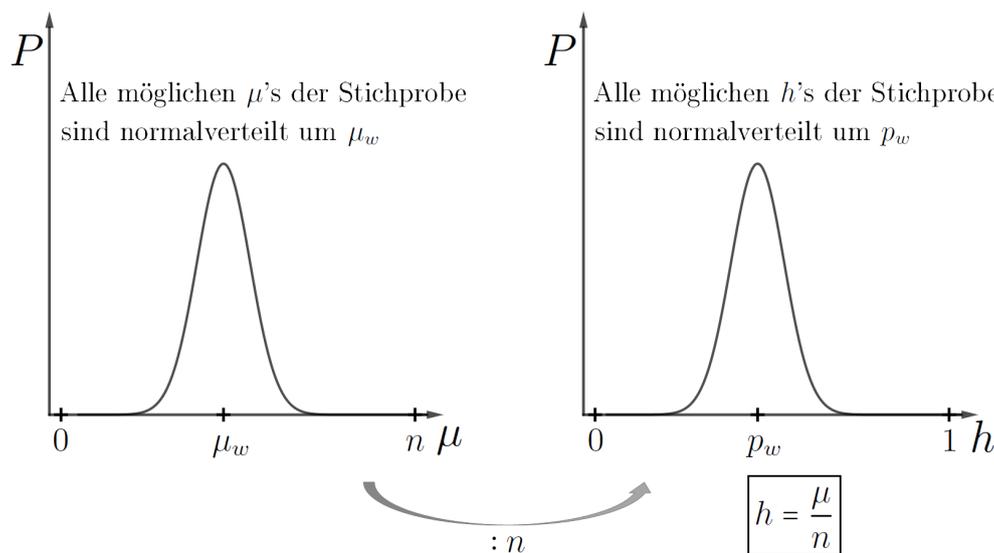
### 3.9.3 Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil $p$ schätzen

Liegt eine Stichprobe mit einer Binomialverteilung vor, bei der die Laplace Bedingung erfüllt ist, so kann mithilfe der ersten Schätzung des Erwartungswerts  $\mu$  (die aus der Stichprobe zu entnehmen ist), eine erste Schätzung  $p$  für die „wahre“ (auf die Grundgesamtheit/Allgemeinheit bezogen) Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil  $p_w$  durch die relative Häufigkeit/prozentualer Anteil  $h$  ( $h = p$ ) getroffen werden. Da  $\mu = n \cdot p \quad | : n \Rightarrow$  gilt für  $h$  ( $h = p$ ):

$$h = \frac{\mu}{n}$$

Da die möglichen Erwartungswerte  $\mu$ , die die vorliegende Stichprobe aufweisen kann, annähernd normalverteilt sind, folgen die jeweils zugehörigen möglichen relativen Häufigkeiten  $\frac{\mu}{n} = h$  derselben Normalverteilung mit dem Unterschied, dass die  $x$ -Achse mit den zugehörigen relativen Häufigkeiten  $h$  skaliert ist (also alle möglichen  $\mu$ 's geteilt durch  $n$ ).

Alle möglichen Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeiten/prozentuale Anteile  $p$  ( $h = p$ ), die die Stichprobe aufweisen kann sind somit normalverteilt um die „wahre“ Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil  $p_w$ .



Durch die Sigma-Regeln kennen wir bestimmte Bereiche/Intervalle ( $\sigma$ -Umgebungen), die bestimmte Wahrscheinlichkeiten in der Normalverteilung annehmen. Diese Information der Wahrscheinlichkeiten wird auf die Konfidenzniveaus  $\gamma$  übertragen und die zugehörigen Konfidenzintervalle entsprechen der jeweiligen  $\sigma$ -Umgebung.  $h = \frac{\mu}{n}$  ist dabei die relative Häufigkeit und  $\sigma_h = \frac{\sqrt{n \cdot h \cdot (1-h)}}{n} = \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$  die zugehörige Standardabweichung, die in der gegebenen Stichprobe vorliegen (also die erste Schätzung für die „wahre“ Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil  $p_w$ ).

Konfidenzintervall für $p_w$	Konfidenzniveau $\gamma$
$\left[ h - \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	68,4%
$\left[ h - 1,64\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 1,64\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	90%
$\left[ h - 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	95%
$\left[ h - 2\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 2\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	95,5%
$\left[ h - 3\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 3\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	99,7%
$\left[ h - z\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + z\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	?

Unterscheidet sich das geforderte Konfidenzniveau  $\gamma$  von den oben gegebenen, so muss  $z$  in dem Konfidenzintervall ( $\sigma$ -Umgebung) so bestimmt werden, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\phi(z) = \frac{1 + \gamma}{2}$$

Das gesuchte  $z$  wird also durch „Rückwärtslesen“ aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ermittelt.

**Beispiel.** In einer Umfrage gaben 30 von 100 zufällig befragten Kindern an, ein Instrument zu spielen. Wie lautet das 95%-Konfidenzintervall für die Trefferwahrscheinlichkeit, das ein Kind ein Instrument spielt?

Da ein Konfidenzintervall für eine Trefferwahrscheinlichkeit gesucht ist, liegt eine Binomialverteilung mit den beiden Ergebnismöglichkeiten („Kind spielt ein Instrument“|„Kind spielt kein Instrument“)  $\Rightarrow$  („Treffer“|„Nicht-Treffer“) vor. Die Stichprobenlänge beträgt  $n = 100$ . Aus der Stichprobe entnehmen wir als erste Schätzung für die Anzahl der instrumentenspielenden Kinder  $\mu = 30$  und schätzen die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil  $p$  mit der relativen Häufigkeit  $h$  ( $h = p$ ), dass ein befragtes Kind ein Instrument spielt/prozentualer Anteil instrumentenspielender Kinder, anhand der Stichprobe auf  $h = \frac{\mu}{n} = \frac{30}{100} = 0,3$ .

2. Ist die Laplace Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot h \cdot (1-h)} = \sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7} \approx 4,58 > 3 \quad \checkmark$$

3. Kennen wir das zum Konfidenzniveau  $\gamma = 95\%$  zugehörige Konfidenzintervall, oder muss zunächst  $z$  bestimmt werden?

Ja, wir kennen das zum Konfidenzniveau  $\gamma = 95\%$  zugehörige Konfidenzintervall:

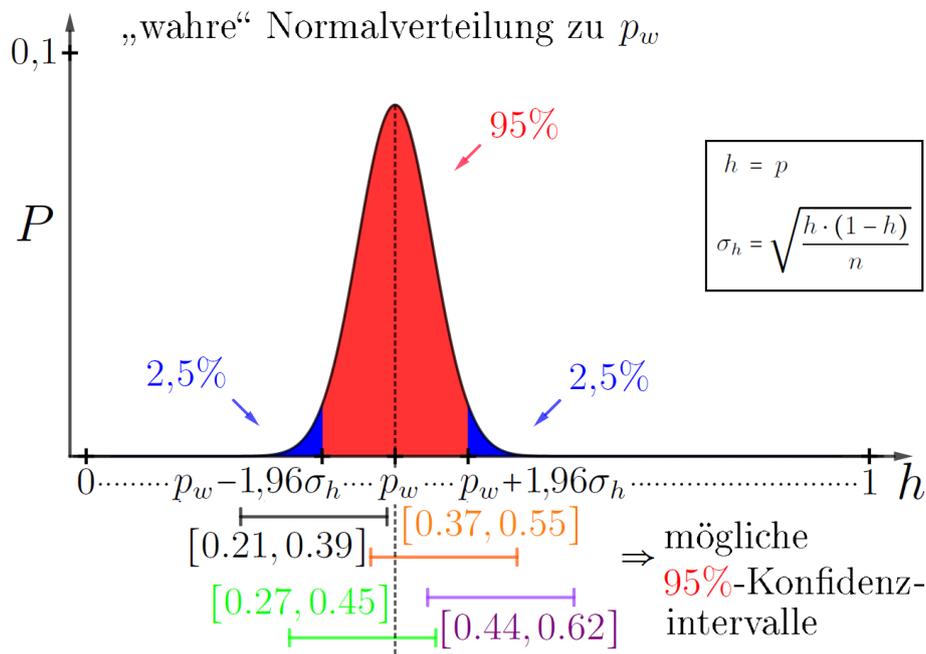
Konfidenzintervall für $p_w$	Konfidenzniveau $\gamma$
$\left[ h - 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$	95%

4. Aufstellen des gesuchten 95%-Konfidenzintervalls für die Anzahl instrumentspielender Kinder:

$$\left[ h - 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}, h + 1,96\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right] = \left[ 0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}} \right]$$

$$= [0.21, 0.39]$$

Antwort: Mit einer Sicherheit/Konfidenzniveau  $\gamma = 95\%$  sind wir zuversichtlich, dass die „wahre“ Trefferwahrscheinlichkeit  $p_w$  („wahre“ Wahrscheinlichkeit/prozentualer Anteil, dass ein Kind ein Instrument spielt (auf die Grundgesamtheit/ALLE Kinder bezogen)) sich im Konfidenzintervall  $[0.21, 0.39]$  befindet.



### 3.10 Einseitiger Hypothesentest

Bei einem Hypothesentest wird eine Hypothese, also eine noch nicht überprüfte Behauptung/Annahme/Aussage über einen bestimmten Sachverhalt, anhand einer Stichprobe auf ihre Gültigkeit geprüft.

Eine Hypothese könnte beispielsweise sein: „Auf dem Oktoberfest trinken mindestens 20% der Festzeltbesucher kein Bier“. Mit einem Hypothesentest könnte man diese Aussage (Hypothese) anhand einer Stichprobe überprüfen, für die man z.B. in einem Festzelt 100 Festzeltbesucher nach ihrem Bierkonsum befragt (also Stichprobenumfang  $n = 100$ ) und nach der Befragung schaut/auswertet, bei wievielen Befragten die Aussage (Hypothese) zugetroffen hat.

Haben bei der Auswertung **höchstens 19** Festzeltbesucher (also zwischen 0–19) angegeben, dass sie kein Bier trinken und somit mindestens 81 Festzeltbesucher (also zwischen 81–100) angegeben, dass sie Bier trinken, so ist die **Hypothese falsch und wird verworfen**, da in der Stichprobe  $n = 100$  NICHT mindestens 20% der Befragten angegeben haben, kein Bier zu trinken.

Haben andererseits bei der Auswertung **mindestens 20** Festzeltbesucher (also zwischen 20–100) angegeben, dass sie kein Bier trinken und somit höchstens 80 Festzeltbesucher (also 0–80) angegeben, dass sie Bier trinken, so ist die **Hypothese wahr und wird angenommen**, da in der Stichprobe  $n = 100$  auf jeden Fall mindestens 20% (oder mehr) der Befragten angegeben haben, kein Bier zu trinken.

Beim einseitigen Hypothesentest wird anhand einer Stichprobe mit dem Umfang  $n$  getestet, ob die in der Aufgabenstellung getroffene Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , in einem **Bernoulli-Experiment** einen „Treffer“ zu landen, in der Stichprobe größer ( $p > p_0$ : rechtsseitiger Test) oder kleiner ( $p < p_0$ : linksseitiger Test) ist, als angenommen.

**Nullhypothese  $H_0$ :** Die Nullhypothese beinhaltet die Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Rechtsseitiger Test:  **$H_0 : p \leq p_0$**

⇒ Keywords: „**höchstens**/maximal/nicht mehr als 20% sind defekt“

2. Linksseitiger Test:  **$H_0 : p \geq p_0$**

⇒ Keywords: „**mindestens**/zumindest/nicht weniger als 20% sind defekt“

**Gegenhypothese  $H_1$ :** Die Gegen-/Alternativhypothese stellt die Verneinung der Nullhypothese dar. Sie ist somit die gegenteilige Aussage zu der Behauptung über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde. Entsprechend den beiden Möglichkeiten der Nullhypothese  $H_0$  stehen zwei Möglichkeiten für die Gegenhypothese dem gegenüber:

1. Rechtsseitiger Test:  $H_1 : p > p_0$

⇒ Keywords: „größer/mehr als 20% sind defekt“

2. Linksseitiger Test:  $H_1 : p < p_0$

⇒ Keywords: „weniger/weniger als 20% sind defekt“

**Entscheidungsregel (Annahme- und Ablehnungsbereich):** Beim einseitigen Hypothesentest betrachtet man immer eine sogenannte Testgröße  $X$ , welche die Anzahl der „Treffer“ in der Stichprobe der Länge  $n$ , angibt. Je nachdem welchen Wert diese Testgröße in der Stichprobe annimmt, wird die Nullhypothese  $H_0$  als wahr angenommen und die Gegenhypothese  $H_1$  verworfen/abgelehnt oder andersherum wird die Nullhypothese  $H_0$  verworfen/abgelehnt und die Gegenhypothese  $H_1$  als wahr angenommen.

**Beispiel.** Die Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Jahr einen Ausschuss von 4% ausgewiesen. In diesem Jahr soll monatlich geprüft werden, ob monatlich prozentual **nicht mehr** Ausschuss **als** im vergangenen Jahr vorliegt. Dafür werden monatlich 200 Bälle der Produktion entnommen.

1. Aufstellen der Nullhypothese  $H_0$  und ihrer Gegenhypothese  $H_1$ :

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,04$  einen defekten Ball zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **rechtsseitigen Test** (Keyword: „**nicht mehr als**“) mit den beiden Hypothesen auf:

$$H_0 : p \leq 0,04$$

$$H_1 : p > 0,04$$

2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von  $n = 200$  Bällen. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 200 defekte Bälle (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich  $A$  der Nullhypothese umfasst alle Ergebnisse, in denen **maximal** 4% der 200 Bälle defekt sind. Somit umfasst der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  alle Ergebnisse, in denen **mehr als** 4% der 200 Bälle defekt sind. 4% von 200 sind  $0,04 \cdot 200 = 8$ . Dementsprechend ist:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{9, 10, \dots, 199, 200\}$$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße  $X$  (Anzahl der defekten Bälle in der Stichprobe mit  $n = 200$  Bällen) annimmt, wird  $H_0$  angenommen und  $H_1$  verworfen oder umgekehrt.

**Beispiel.** Die Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Jahr einen Ausschuss von 15% ausgewiesen. Das Produktionsverfahren wurde daraufhin über den

Jahreswechsel optimiert und es soll fortan monatlich überprüft werden, ob der Ausschuss prozentual **weniger als** im vergangenen Jahr geworden ist. Für die Überprüfung werden monatlich 200 Bälle der Produktion entnommen.

1. Aufstellen der Nullhypothese  $H_0$  und ihrer Gegenhypothese  $H_1$ :

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,15$  einen defekten Ball zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **linksseitigen Test** (Keyword: „**weniger als**“) mit den beiden Hypothesen auf:

$$H_0 : p \geq 0,15$$

$$H_1 : p < 0,15$$

2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von  $n = 200$  Bällen. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 200 defekte Bälle (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich  $A$  der Nullhypothese umfasst alle Ergebnisse, in denen **mindestens** 15% der 200 Bälle defekt sind. Somit umfasst der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  alle Ergebnisse, in denen **weniger als** 15% der 200 Bälle defekt sind. 15% von 200 sind  $0,15 \cdot 200 = 30$ . Dementsprechend ist:

$$A = \{30, 31, \dots, 199, 200\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 28, 29\}$$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße  $X$  (Anzahl der defekten Bälle in der Stichprobe mit  $n = 200$  Bällen) annimmt, wird  $H_0$  angenommen und  $H_1$  verworfen oder umgekehrt.

### 3.10.1 Fehler 1. Art

Da man bei Hypothesentests „nur“ eine Stichprobe berücksichtigt, kann der Fall eintreten, dass die Auswertung der Stichprobe zu einer Ablehnung der Nullhypothese  $H_0$  führt, obwohl jedoch „in Wahrheit“ (auf die Grundgesamtheit bezogen) die Nullhypothese  $H_0$  eigentlich wahr ist (Wenn man nicht nur die Stichprobe, sondern ALLE, berücksichtigt). In diesem Fall, wenn also die Nullhypothese  **$H_0$  zu Unrecht/irrtümlich** bei einem Hypothesentest **verworfen/abgelehnt** wird, liegt ein sogenannter **Fehler 1. Art** vor (auch  $\alpha$ -Fehler genannt).

**Beispiel.** In den Festzelten des Oktoberfests herrscht Jahr für Jahr reges Treiben. Täglich strömen etwa 150.000 Besucher in die Festzelte um sich mit Speis und Trank zu verköstigen. In einem Interview behauptet der Oktoberfest-Veranstalter, „dass auf dem Oktoberfest **mindestens** 20% der Festzeltbesucher kein Bier trinken“. Diese Hypothese

möchte ein eifriger Student in seiner Abschlussarbeit durch einen Hypothesentest überprüfen. Dafür befragt er an einem Samstag 100 Festzeltbesucher nach ihrem Bierkonsum.

Linksseitiger Hypothesentest (Keyword: „**mindestens**“) mit der „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  und einem Stichprobenumfang  $n = 100$ :

$$H_0 : p \geq 0,2$$

$$H_1 : p < 0,2$$

Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$A = \{20, 21, \dots, 99, 100\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 18, 19\}$$

Beispiel für einen **Fehler 1. Art** bei diesem Hypothesentest:

In der Stichprobe von den 100 Befragten geben nur 17 Personen (also  $17\% < 20\%$ ) an, dass sie kein Bier trinken. Somit wird die Nullhypothese  $H_0$  verworfen/abgelehnt. Hätte der Student jedoch sich die Mühe gemacht und ALLE 150.000 anwesenden Festzeltbesucher an diesem Tag nach ihrem Bierkonsum befragt, so wäre herausgekommen, dass 45.000 Personen (also  $\frac{45.000}{150.000} \cdot 100 = 30\% \geq 20\%$ ) angegeben hätten, dass sie kein Bier trinken. Auf die Grundgesamtheit (ALLE 150.000 Festzeltbesucher) bezogen wurde somit die Nullhypothese  $H_0$  bei diesem Hypothesentest zu Unrecht/irrtümlich verworfen.

Ein **Fehler 1. Art** wäre natürlich gerade für unseren eifrigen Studenten sehr ärgerlich, gerade weil die Durchführung und Auswertung eines Hypothesentest mit viel Aufwand verbunden ist. Unser Student ist somit sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher **Fehler 1. Art** auftritt, möglichst klein zu halten. Jedoch soll dabei die Aussagekraft/Signifikanz des Hypothesentests in Bezug auf die Grundgesamtheit so hoch wie möglich bleiben, schließlich wird die Studie in einem renommierten, wissenschaftlichen Paper der Universität veröffentlicht.

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein solcher **Fehler 1. Art** bei einem Hypothesentest auftritt (man spricht auch von der **Irrtumswahrscheinlichkeit**), hängt von der Wahl des **kritischen Werts  $k$**  ab, ab dem die Nullhypothese  $H_0$  angenommen wird. Der **kritische Wert  $k$**  ist somit der Wert im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ , der den Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  vom Annahmebereich  $A$  „trennt“. Beim rechtsseitigen Test ist also  $k$  der kleinste Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  und andersherum ist beim linksseitigen Test  $k$  der größte Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ .

Bei einem Hypothesentest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit dem **kritischen Wert  $k$**  berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit** gemäß der Binomialverteilung  $(n, p_0)$ :

$$\text{Rechtsseitiger Test: } P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

$$\text{Linksseitiger Test: } P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k)$$

**Beispiel.** Die Aussage „Die Produktionsmaschine der Beerpong AG hat in ihrer Bäl-

leproduktion im vergangenen Geschäftsjahr einen Ausschuss von höchstens 5% gehabt“ stand im letzten Geschäftsbericht der Beerpong AG. Ein Mitarbeiter befürchtet, bedingt durch Verschleiß, dass die Maschine nun im neuen Geschäftsjahr einen höheren prozentualen Ausschuss generiert. Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn mehr als 2 Bälle defekt sind, so muss die Aussage des letzten Geschäftsjahres verworfen und angepasst werden. Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „höchstens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,05$  und einem Stichprobenumfang  $n = 20$  dar:

$$H_0 : p \leq 0,05$$

$$H_1 : p > 0,05$$

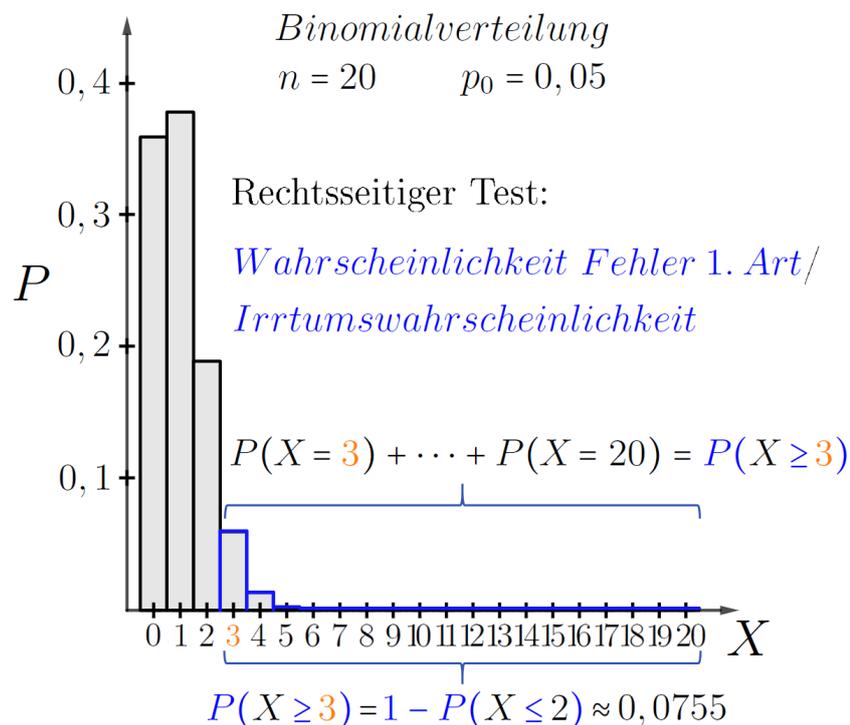
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$\underline{A} = \{0, 1, 2\} \text{ und}$$

$$\overline{A} = \{3, 4, \dots, 19, 20\}$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 3$  ist die **Irrtumswahrscheinlichkeit/Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art**: (entweder mit TR oder Blick in die F-Tabelle-Binomialverteilung)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3 - 1) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,9245 = 0,0755$$



**Beispiel.** Um die stark gestiegene Nachfrage zu bedienen, investiert die Beerpong AG in eine weitere Produktionsmaschine zur Herstellung von Spielbällen. Nachdem die neue Produktionsmaschine in Betrieb ist, bemängelt ein Mitarbeiter die hohe Quote produzierter Bälle, die einen Defekt aufweisen. Seiner Meinung nach „produziert die neu angeschaffte Produktionsmaschine einen Ausschuss von mindestens 20%“. Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn weniger als 3 Bälle defekt sind, so wird die Aussage des Mitarbeiters verworfen und kein Schadenersatz vom Hersteller eingefordert. Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  und einem Stichprobenumfang  $n = 20$  dar:

$$H_0 : p \geq 0,2$$

$$H_1 : p < 0,2$$

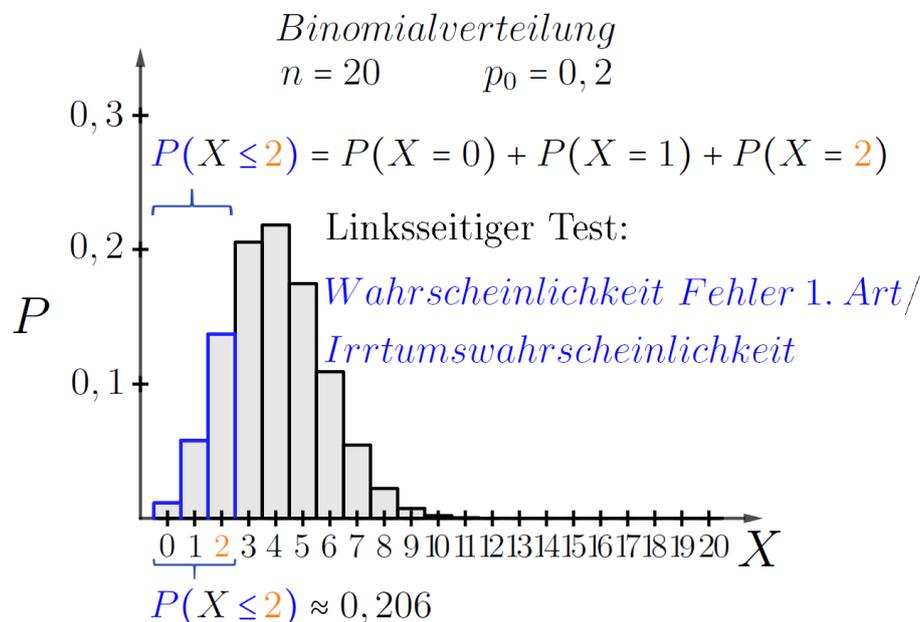
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$A = \{3, 4, \dots, 19, 20\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, 2\}$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 2$  ist die **Irrtumswahrscheinlichkeit/Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art**: (entweder mit TR oder Blick in die F-Tabelle-Binomialverteilung)

$$P(X \leq 2) \approx 0,206$$



### 3.10.2 Signifikanzniveau

Bei der Durchführung eines Hypothesentests ist man sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit gering zu halten. Dabei soll aber der Test aussagekräftig/signifikant sein. Das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  eines Hypothesentests ist GLEICH der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit und berechnet sich dementsprechend GLEICH:

$$\text{Rechtsseitiger Test: } \alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

$$\text{Linksseitiger Test: } \alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k)$$

In der Wissenschaft wird in der Regel bei den meisten Hypothesentests, je nach Größe der Stichprobe ( $n$ ), ein **Signifikanzniveau** von  $\alpha = 10\%$  (0,1),  $\alpha = 5\%$  (0,05) oder  $\alpha = 1\%$  (0,01) verwendet. Auf diesem Niveau sind die Ergebnisse der Tests „aussagekräftig“.

Daher ist oft eine Aufgabenstellung, den Annahme- und Ablehnungsbereich eines Hypothesentests so zu wählen, dass ein bestimmtes **Signifikanzniveau** (z.B.  $\alpha = 5\%$ ) erfüllt ist. Es geht darum, den **kritischen Wert**  $k$  (der den Ablehnungsbereich vom Annahmehereich „trennt“) so zu wählen, dass das vorher festgelegte **Signifikanzniveau** erfüllt ist. Da das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  sich durch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, wird damit folgendermaßen das gesuchte  $k$  herausgefunden/berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Rechtsseitiger Test: } 1 - P(X \leq k - 1) &\leq \alpha & | & + P(X \leq k - 1) & | & - \alpha \\ & & & 1 - \alpha \leq P(X \leq k - 1) & & \\ & & & \Rightarrow P(X \leq k - 1) \geq 1 - \alpha & & \end{aligned}$$

$$\text{Linksseitiger Test: } P(X \leq k) \leq \alpha$$

Beim rechtsseitigen Test wählt man „ $\geq 1 - \alpha$ “ und beim linksseitigen „ $\leq \alpha$ “ deshalb, da der **kritische Wert**  $k$  nur ganze Werte annehmen kann (Nur ganze Zahlen, NICHT „Kommazahlen“). Beim rechtsseitigen Test sucht man also die **kleinstmögliche ganze Zahl** im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  als **kritischen Wert**  $k$ , für die die **Ungleichung** erfüllt ist. Beim linksseitigen Test sucht man andererseits die **größtmögliche ganze Zahl** im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  als **kritischen Wert**  $k$ , für die die **Ungleichung** erfüllt ist.

**Beispiel.** Ein YouTuber hatte bisher auf seinem Channel eine Like/Dislike-Quote von 3/1 (75%/25%). Für sein neuestes Video ist er eine Kooperation mit einem Werbepartner eingegangen, der nur dann bezahlt, wenn im neuen Video mindestens 75% der Bewertungen „Likes“ sind. Da das Video eine längere Zeit online bleiben soll, der YouTuber jedoch zeitnah bezahlt werden möchte, treffen beide Parteien die Vereinbarung, dass ein Hypothesentest der Hypothese „Im neuen Video sind mindestens 75% der Bewertungen Likes“ darüber entscheidet, ob der Werbepartner zu einer Zahlung verpflichtet ist oder nicht. Für die Durchführung des Tests mit einem vereinbarten Signifikanzniveau von 5% werden die ersten 50 Bewertungen des Videos nach Veröffentlichung betrachtet. Wie

lautet die Entscheidungsregel für die optionale Zahlungsverpflichtung?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,75$ , einem Stichprobenumfang  $n = 50$  und einem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  dar:

$$H_0 : p \geq 0,75$$

$$H_1 : p < 0,75$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welchen **kritischen Wert**  $k$  gilt:  $P(X \leq k) \leq 0,05$  ?

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert  $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,75 = 37,5$ . Beim linksseitigen Test **muss  $k$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt links vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  für die „möglichen  $k$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 50$  der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 0,75$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **kleiner als**  $E(X)$  ein („mögliche  $k$ 's“, in dem Fall  $X = 37, 36, \dots, 28, 27$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert**  $k$ . Falls  $P(X \leq k)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch größer als  $0,05$  ist, so müsst ihr so lange immer weitere, kleinere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Beim linksseitigen Test **muss  $k$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt links vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert**  $k$ .

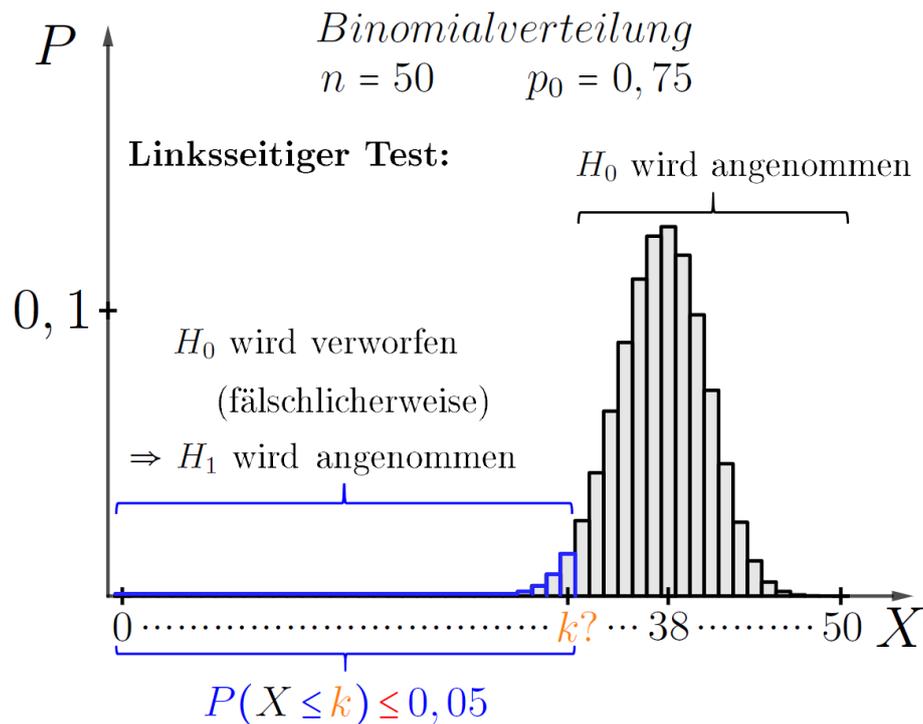
Da  $P(X \leq 32) = 0,0551 > 0,05$  und  $P(X \leq 31) = 0,0287 \leq 0,05$  ist der gesuchte **kritische Wert**  $k = 31$  und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{32, 33, \dots, 49, 50\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 30, 31\}$$

**Antwort:** „Sind bei den 50 Bewertungen 32 oder mehr Likes dabei, so muss der Werbepartner den YouTuber ausbezahlen, andernfalls ist der Werbepartner zu keiner Zahlung verpflichtet.“

**Hinweis:** Habt ihr einen grafikfähigen Taschenrechner zur Verfügung, lässt sich die Liste von „möglichen  $k$ 's“ und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  direkt für alle  $X$ -Werte erstellen, indem ihr die Anwendung „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ als eine Funktion mit der Variable  $x$ ,  $n = 50$  und  $p = 0,75$  in eurem Taschenrechner definiert. Anschließend könnt ihr euch die Wertetabelle dieser Funktion für  $X = 0, 1, \dots, 49, 50$  ausgeben lassen und direkt schauen, für welchen **kritischen Wert**  $k$   $P(X \leq k) \leq 0,05$  gilt.



**Beispiel.** „Mehr als 30% meiner Follower schauen sich täglich die Stories auf meinem Instagram-Account an“ behauptet eine bekannte Influencerin gegenüber einer Werbeagentur, um ihre Preisforderungen zu rechtfertigen. Die Werbeagentur geht eher davon aus, dass „höchstens 30% ihrer Follower sich die Stories täglich anschauen“ und ordnet zur Überprüfung einen Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 10% an, in dem 40 im Vorhinein willkürlich ausgewählte Follower beobachtet werden, ob sie sich die nächste Story der Influencerin anschauen werden, oder nicht. Wie lautet die Entscheidungsregel, wer am Ende recht hat?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „mehr als“, „höchstens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,3$ , einem Stichprobenumfang  $n = 40$  und einem **Signifikanzniveau**  $\alpha = 0,1$  dar:

$$H_0 : p \leq 0,3$$

$$H_1 : p > 0,3$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welchen **kritischen Wert**  $k$  gilt:  $P(X \leq k - 1) \geq 1 - 0,1 = 0,9$  ?

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert  $E(X) = n \cdot p = 40 \cdot 0,3 = 12$ . Beim rechtsseitigen Test **muss  $k$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt rechts vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k - 1)$  für die „möglichen  $k$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 40$  der Stichprobe, die

Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 0,3$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **größer als**  $E(X)$  ein („mögliche  $k$ 's“, in dem Fall  $X = 13, 14, \dots, 22, 23$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k - 1) \geq 0,9$  ist. Dieses  $X + 1$  (!!!) ist der gesuchte **kritische Wert  $k$** . Falls  $P(X \leq k - 1)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch kleiner als  $0,9$  ist, so müsst ihr so lange immer weitere, größere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k - 1) \geq 0,9$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Beim rechtsseitigen Test **muss  $k$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt rechts vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k - 1) \geq 0,9$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k$** .

Da  $P(X \leq 15) = 0,8848 < 0,9$  und  $P(X \leq 16) = 0,9366 \geq 0,9$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k = 16 + 1 = 17$**  (da  $k - 1 = 16$ ) und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

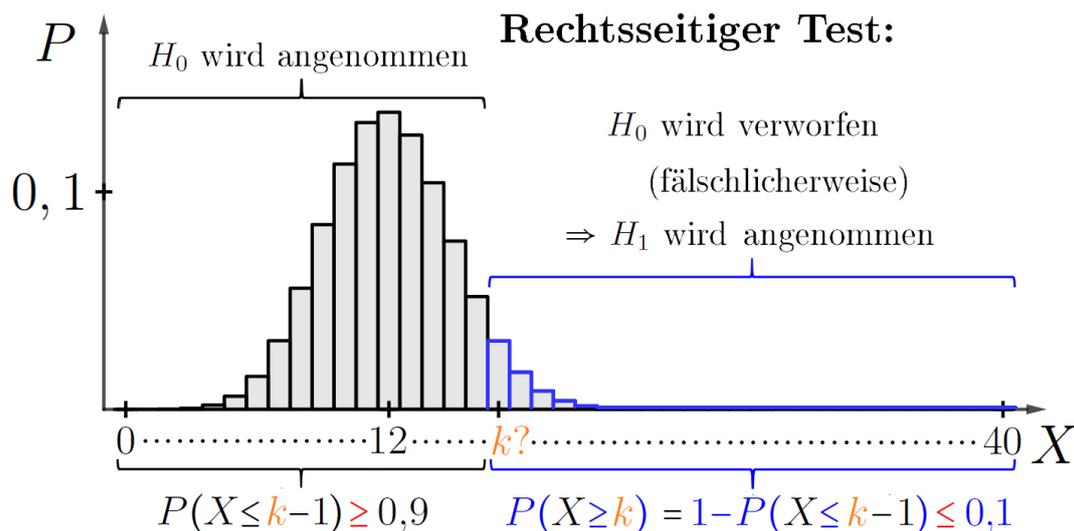
$$\underline{A} = \{0, 1, \dots, 15, 16\} \text{ und}$$

$$\overline{A} = \{17, 18, \dots, 39, 40\}$$

**Antwort:** „Sind bei den 40 Followern 16 oder weniger dabei, die die nächste Storie anschauen, so hatte die Werbeagentur recht, andernfalls behält die Influencerin recht und hat eine fundierte Begründung für ihre Preisforderungen.“

**Hinweis:** Mit einem grafikfähigen Taschenrechner könnt ihr wie im vorherigen Beispiel beschrieben verfahren, bloß die Werte für  $n$  und  $p$  müsst ihr anpassen. Und achtet auf das  $X + 1$  um  $k$  zu bestimmen!

*Binomialverteilung*  
 $n = 40 \quad p_0 = 0,3$



### 3.10.3 Fehler 2. Art

Da man bei Hypothesentests „nur“ eine Stichprobe berücksichtigt, kann der Fall eintreten, dass die Auswertung der Stichprobe zu einer Annahme der Nullhypothese  $H_0$  führt, obwohl jedoch „in Wahrheit“ (auf die Grundgesamtheit bezogen) die Nullhypothese  $H_0$  eigentlich falsch ist (Wenn man nicht nur die Stichprobe, sondern ALLE, berücksichtigt). In diesem Fall, wenn also die Nullhypothese  **$H_0$  zu Unrecht/irrtümlich** bei einem Hypothesentest **angenommen** wird, liegt ein sogenannter **Fehler 2. Art** vor (auch  $\beta$ -Fehler genannt).

**Beispiel.** In den Festzelten des Oktoberfests herrscht Jahr für Jahr reges Treiben. Täglich strömen etwa 150.000 Besucher in die Festzelte um sich mit Speis und Trank zu verköstigen. In einem Interview behauptet der Oktoberfest-Veranstalter, „dass auf dem Oktoberfest **mindestens** 20% der Festzeltbesucher kein Bier trinken“. Diese Hypothese möchte ein eifriger Student in seiner Abschlussarbeit durch einen Hypothesentest überprüfen. Dafür befragt er an einem Samstag 100 Festzeltbesucher nach ihrem Bierkonsum.

Linksseitiger Hypothesentest (Keyword: „**mindestens**“) mit der „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  und einem Stichprobenumfang  $n = 100$ :

$$H_0 : p \geq 0,2$$

$$H_1 : p < 0,2$$

Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$A = \{20, 21, \dots, 99, 100\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 18, 19\}$$

Beispiel für einen **Fehler 2. Art** bei diesem Hypothesentest:

In der Stichprobe von den 100 Befragten geben 42 Personen (also  $42\% \geq 20\%$ ) an, dass sie kein Bier trinken. Somit wird die Nullhypothese  $H_0$  angenommen. Hätte der Student jedoch sich die Mühe gemacht und ALLE 150.000 anwesenden Festzeltbesucher an diesem Tag nach ihrem Bierkonsum befragt, so wäre herausgekommen, dass 21.000 Personen (also  $\frac{21.000}{150.000} \cdot 100 = 14\% < 20\%$ ) angegeben hätten, dass sie kein Bier trinken. Auf die Grundgesamtheit (ALLE 150.000 Festzeltbesucher) bezogen wurde somit die Nullhypothese  $H_0$  bei diesem Hypothesentest zu Unrecht/irrtümlich angenommen.

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein solcher **Fehler 2. Art** bei einem Hypothesentest auftritt, hängt von der Wahl des **kritischen Werts**  $k$  ab, ab dem die Nullhypothese  $H_0$  angenommen wird. Der **kritische Wert**  $k$  ist somit der Wert im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ , der den Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  vom Annahmebereich  $A$  „trennt“. Beim rechtsseitigen Test ist also  $k$  der kleinste Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  und andersherum ist beim linksseitigen Test  $k$  der größte Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ .

Bei einem Hypothesentest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der **eigentlich wahren** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1$  ( $p_0$  ist nicht wahr!), mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit dem **kritischen Wert**  $k$  berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art** gemäß der **Binomialverteilung**  $(n, p_1)$ :

$$\text{Rechtsseitiger Test: } P_{p_1}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p_1}(X \leq k - 1)$$

$$\text{Linksseitiger Test: } P_{p_1}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p_1}(X \geq k + 1) = 1 - P_{p_1}(X \leq k)$$

**Beispiel.** Die Aussage „Die Produktionsmaschine der Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Geschäftsjahr einen Ausschuss von höchstens 20% gehabt“ stand im letzten Geschäftsbericht der Beerpong AG. Ein Mitarbeiter befürchtet, bedingt durch Verschleiß, dass die Maschine nun im neuen Geschäftsjahr einen höheren prozentualen Ausschuss von 40% generiert. Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn mehr als 6 Bälle defekt sind, so muss die Aussage des letzten Geschäftsjahres verworfen und angepasst werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art dieser Überprüfung, also dass die Aussage des letzten Geschäftsjahres angenommen wird, obwohl die Befürchtung des Mitarbeiters wahr ist?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „höchstens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  und einem Stichprobenumfang  $n = 20$  dar:

$$H_0 : p \leq 0,2$$

$$H_1 : p > 0,2$$

Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

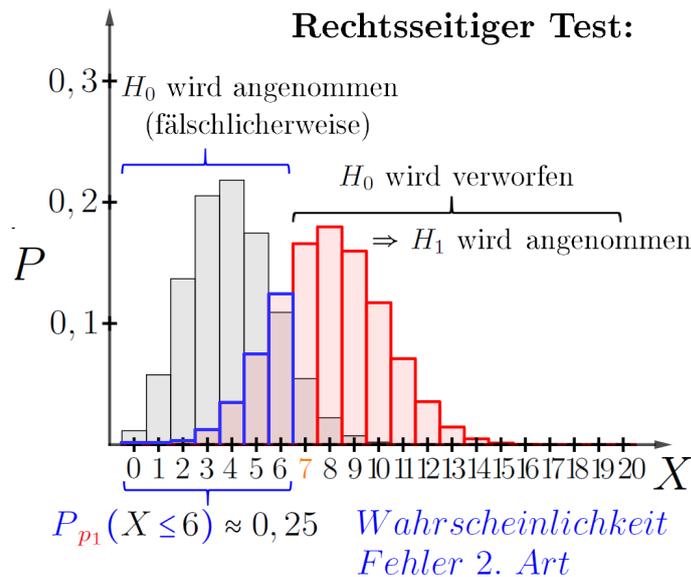
$$A = \{0, 1, \dots, 5, 6\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{7, 8, \dots, 19, 20\}$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 7$  und die **eigentlich wahre** „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1 = 0,4$  ist die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art**: (entweder mit Taschenrechner oder Blick in die F-Tabelle der Binomialverteilung)

$$P_{p_1}(X \leq 7 - 1) = P_{p_1}(X \leq 6) \approx 0,25$$

Binomialverteilung  $n = 20$   $p_0 = 0,2$  **Binomialverteilung**  $n = 20$   $p_1 = 0,4$



**Beispiel.** Um die stark gestiegene Nachfrage zu bedienen, investiert die Beerpong AG in eine weitere Produktionsmaschine zur Herstellung von Spielbällen. Nachdem die neue Produktionsmaschine in Betrieb ist, bemängelt ein Mitarbeiter die hohe Quote produzierter Bälle, die einen Defekt aufweisen. Seiner Meinung nach „produziert die neu angeschaffte Produktionsmaschine einen Ausschuss von mindestens 30%“. Laut Maschinenhersteller weist die neue Produktionsmaschine einen Ausschuss von 10% auf. Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn weniger als 4 Bälle defekt sind, so wird die Aussage des Mitarbeiters verworfen und kein Schadenersatz vom Hersteller eingefordert. Wie hoch ist die für einen Fehler 2. Art dieser Überprüfung, also dass fälschlicherweise vom Maschinenhersteller Schadenersatz gefordert wird?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,3$  und einem Stichprobenumfang  $n = 20$  dar:

$$H_0 : p \geq 0,3$$

$$H_1 : p < 0,3$$

Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

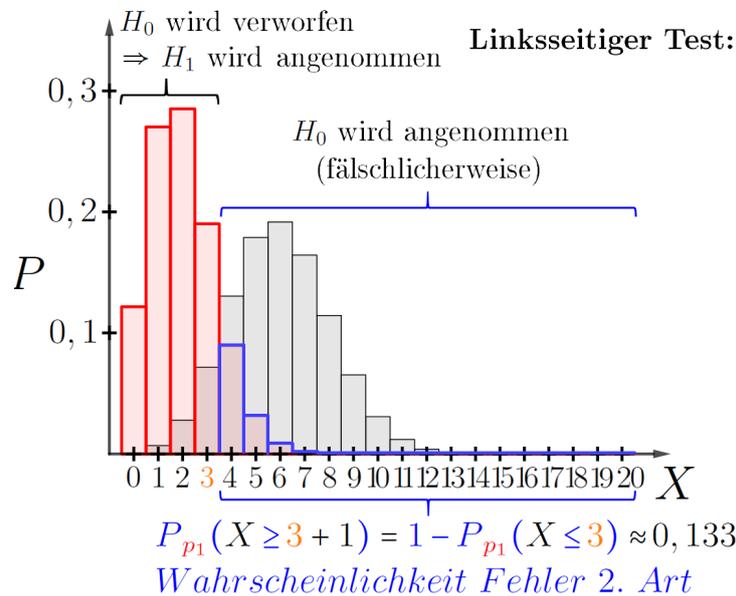
$$A = \{4, 5, \dots, 19, 20\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, 2, 3\}$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 3$  und die **eigentlich wahre** „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1 = 0,1$  ist die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art**:

$$P_{p_1}(X \geq 3 + 1) = 1 - P_{p_1}(X \leq 3) \approx 1 - 0,867 = 0,133$$

**Binomialverteilung**  $n = 20$   $p_1 = 0,1$  **Binomialverteilung**  $n = 20$   $p_0 = 0,3$



### 3.10.4 Normalverteilung - Einseitiger Signifikanztest mit Sigma-Regeln

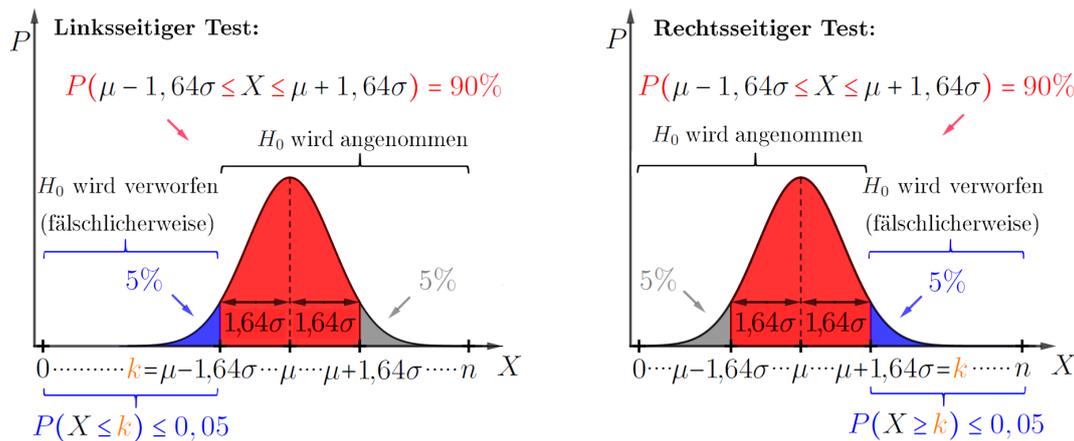
Ist die Laplace Bedingung erfüllt, kann die in der Aufgabenstellung vorliegende Binomialverteilung  $Bin(n, p)$  durch die zugehörige Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  angenähert werden und der gesuchte **kritische Wert  $k$**  bei einem gegebenen **Signifikanzniveau  $\alpha$**  mithilfe der Sigma-Regeln ermittelt werden.

Der **kritische Wert  $k$**  (der den Ablehnungsbereich vom Annahmebereich „trennt“) ist so zu wählen, dass das vorher festgelegte **Signifikanzniveau** erfüllt ist. Da in der Regel mit dem **Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$**  getestet wird, berechnen wir den **kritischen Wert  $k$**  im Folgenden mit der  $1,64\sigma$ -Umgebung ( $[\mu - 1,64\sigma, \mu + 1,64\sigma]$ ):

$$\text{Rechtsseitiger Test: } k = \mu + 1,64\sigma$$

$$\text{Linksseitiger Test: } k = \mu - 1,64\sigma$$

**Hinweis:** Sollte eine Kommazahl für den **kritischen Wert  $k$**  herauskommen, dann wird beim rechtsseitigen Test die Kommazahl **immer aufgerundet** (z.B.  $k = 71,27 \rightarrow k = 72$ ), während beim linksseitigen Test die Kommazahl **immer abgerundet** wird (z.B.  $k = 21,83 \rightarrow k = 21$ ). Man nennt es auch das Runden zur sicheren Seite.



**Beispiel.** Die Aussage „Die Produktionsmaschine der Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Geschäftsjahr einen Ausschuss von mindestens 10% gehabt“ stand im letzten Geschäftsbericht der Beerpong AG. Nach Wartungsarbeiten an der Maschine ordnet die Geschäftsleitung eine erneute Überprüfung in Form eines Hypothesentests mit einem Signifikanzniveau von 5% an. Für die Durchführung des Tests werden 200 Bälle zufällig aus der Produktion entnommen. Wie lautet die Entscheidungsregel?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,1$ , einem Stichprobenumfang  $n = 200$  und einem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  dar:

$$H_0 : p \geq 0,1$$

$$H_1 : p < 0,1$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welchen **kritischen Wert**  $k$  gilt:  $P(X \leq k) \leq 0,05$  ?

Ist die Laplace Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)} = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,24 > 3$$

Die Laplace Bedingung ist erfüllt. Somit kann die Binomialverteilung  $Bin(200, 0.1)$  durch die Normalverteilung  $N(20, 4.24)$  angenähert werden ( $\mu = n \cdot p_0 = 200 \cdot 0,1 = 20$ ) und die Sigma-Regeln können angewendet werden. Also berechnet sich der **kritische Wert**  $k$  bei diesem linksseitigen Test mit dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  durch die  $1,64\sigma$ -Umgebung:

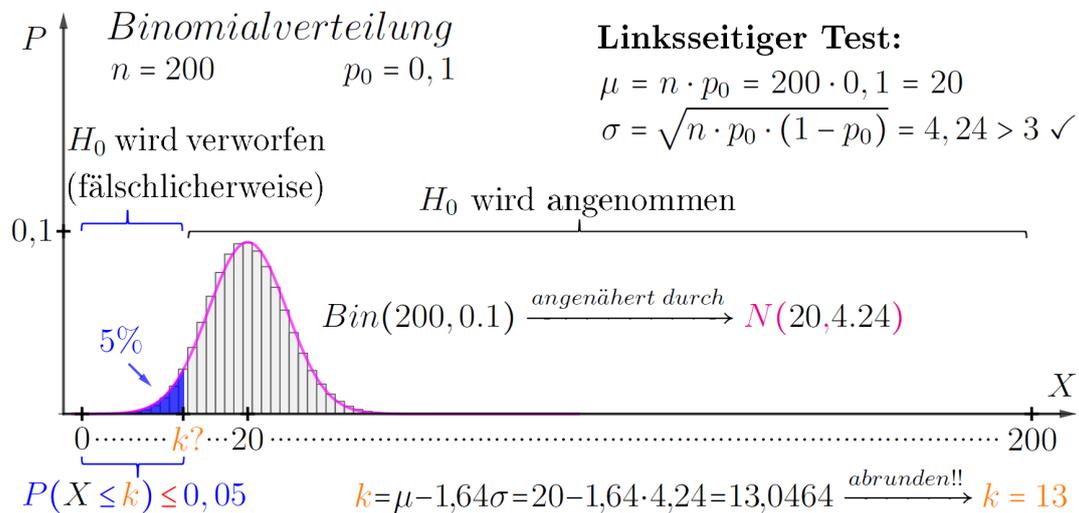
$$\text{Linksseitiger Test: } k = \mu - 1,64\sigma = 20 - 1,64 \cdot 4,24 = 13,0464 \xrightarrow{\text{abrunden!!}} k = 13$$

Damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{14, 15, \dots, 199, 200\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 12, 13\}$$

**Antwort:** „Sind bei den 200 entnommenen Bällen 14 oder mehr defekte Bälle dabei, so wird die Nullhypothese angenommen, andernfalls bei 13 oder weniger defekten Bällen wird sie verworfen.“



**Beispiel.** Die Aussage „Die Produktionsmaschine der Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Geschäftsjahr einen Ausschuss von höchstens 10% gehabt“ stand im letzten Geschäftsbericht der Beerpong AG. Nach Wartungsarbeiten an der Maschine ordnet die Geschäftsleitung eine erneute Überprüfung in Form eines Hypothesentests mit einem Signifikanzniveau von 5% an. Für die Durchführung des Tests werden 200 Bälle zufällig aus der Produktion entnommen. Wie lautet die Entscheidungsregel?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „höchstens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0.1$ , einem Stichprobenumfang  $n = 200$  und einem Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  dar:

$$H_0 : p \leq 0.1$$

$$H_1 : p > 0.1$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welchen kritischen Wert  $k$  gilt:  $P(X \geq k) \leq 0.05$  ?

Ist die Laplace Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)} = \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 4,24 > 3$$

Die Laplace Bedingung ist erfüllt. Somit kann die Binomialverteilung  $Bin(200, 0.1)$  durch die Normalverteilung  $N(20, 4.24)$  angenähert werden ( $\mu = n \cdot p_0 = 200 \cdot 0,1 = 20$ ) und die Sigma-Regeln können angewendet werden. Also berechnet sich der **kritische Wert**  $k$  bei diesem rechtsseitigen Test mit dem **Signifikanzniveau**  $\alpha = 0,05$  durch die  $1,64\sigma$ -Umgebung:

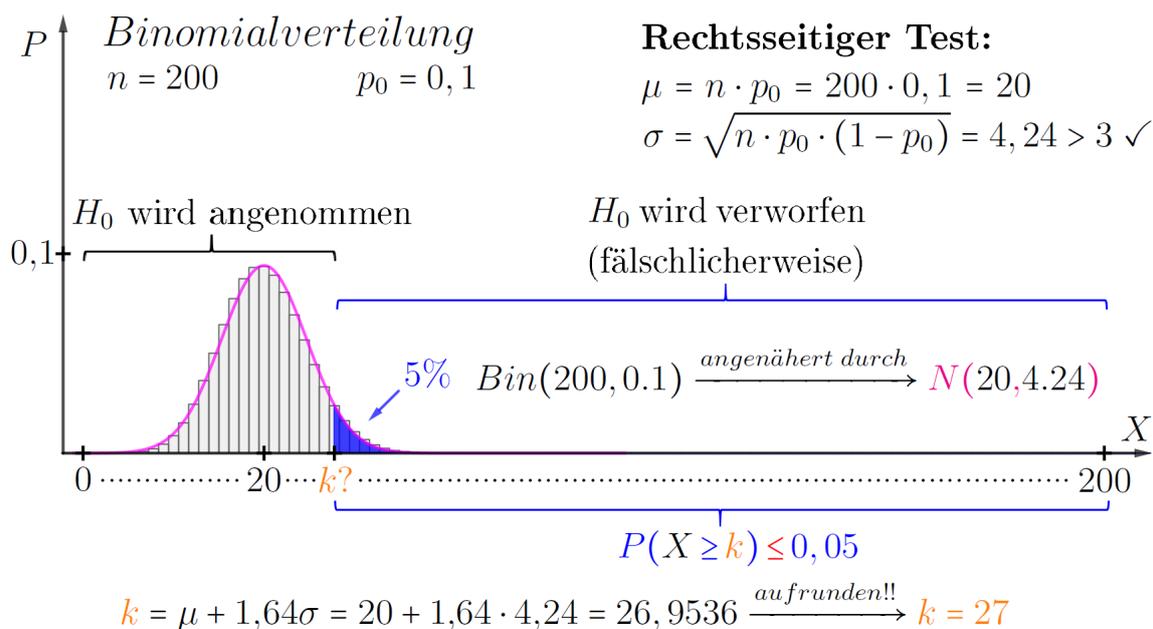
$$\text{Rechtsseitiger Test: } k = \mu + 1,64\sigma = 20 + 1,64 \cdot 4,24 = 26,9536 \xrightarrow{\text{aufrunden!!}} k = 27$$

Damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{0, 1, \dots, 25, 26\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{27, 28, \dots, 199, 200\}$$

**Antwort:** „Sind bei den 200 entnommenen Bällen 26 oder weniger defekte Bälle dabei, so wird die Nullhypothese angenommen, andernfalls bei 27 oder mehr defekten Bällen wird sie verworfen.“



### 3.11 Zwei-/Beidseitiger Hypothesentest

Beim zwei-/beidseitigen Hypothesentest wird anhand einer Stichprobe mit dem Umfang  $n$  getestet, ob die in der Aufgabenstellung getroffene Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , in einem **Bernoulli-Experiment** einen „Treffer“ zu landen, in der

Stichprobe zutrifft ( $p = p_0$ ) oder sich geändert/verändert hat ( $p \neq p_0$ ), also entweder größer oder kleiner ist als angenommen (es wird immer in beide Richtungen/Seiten (beidseitig) getestet!).

**Nullhypothese  $H_0$ :** Die Nullhypothese beinhaltet die Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde.

Zwei-/Beidseitiger Test:  $H_0 : p = p_0$

⇒ Keywords: „haben sich die 20% geändert/verändert?“

**Gegenhypothese  $H_1$ :** Die Gegen-/Alternativhypothese stellt die Verneinung der Nullhypothese dar. Sie ist somit die gegenteilige Aussage zu der Behauptung über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde.

Zwei-/Beidseitiger Test:  $H_1 : p \neq p_0$

**Entscheidungsregel (Annahme- und Ablehnungsbereich):** Beim zwei-/beidseitigen Hypothesentest betrachtet man immer eine sogenannte Testgröße  $X$ , welche die Anzahl der „Treffer“ in der Stichprobe der Länge  $n$ , angibt. Je nachdem welchen Wert diese Testgröße in der Stichprobe annimmt, wird die Nullhypothese  $H_0$  als wahr angenommen und die Gegenhypothese  $H_1$  verworfen/abgelehnt oder andersherum wird die Nullhypothese  $H_0$  verworfen/abgelehnt und die Gegenhypothese  $H_1$  als wahr angenommen. Beim zwei-/beidseitigen Hypothesentest wird in beide Richtungen/Seiten (beidseitig) getestet, ob die Nullhypothese sich **geändert** hat, also ob die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$  **entweder größer oder kleiner ist** als angenommen. Deshalb werden beim Ablehnungsbereich **sowohl die linke als auch die rechte Seite** betrachtet.

**Beispiel.** Laut einer Umfrage vor 2 Jahren gehen 60% der volljährigen Schüler(innen) jedes Wochenende feiern. An einer Schule wollen die Abiturienten überprüfen, ob diese Quote sich dieses Jahr **geändert** hat. Dafür befragen sie 50 volljährige Schüler(innen) an ihrer Schule und beschließen, wenn weniger als 24 oder mehr als 36 angeben regelmäßig wochenends zu feiern, wird die Hypothese von vor 2 Jahren verworfen.

1. Aufstellen der Nullhypothese  $H_0$  und ihrer Gegenhypothese  $H_1$ :

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,6$ , eine(n) wochenends feierwütige(n) volljährige(n) Schüler(in) zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **zwei-/beidseitigen Test** (Keyword: „geändert“) mit den beiden Hypothesen auf:

$$H_0 : p = 0,6$$

$$H_1 : p \neq 0,6$$

## 2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von  $n = 50$  befragten Schüler(inn)en. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 50 feierwütige Schüler(inn)en (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich  $A$  und Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  lautet bei diesem zwei-/beidseitigen Test somit:

$$A = \{24, 25, \dots, 35, 36\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \underbrace{\{0, 1, \dots, 22, 23\}}_{\text{linke Seite}} \cup \underbrace{\{37, 38, \dots, 49, 50\}}_{\text{rechte Seite}}$$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße  $X$  (Anzahl der feierwütigen Schüler(inn)en in der Stichprobe mit  $n = 50$  befragten Schüler(inn)en) annimmt, wird  $H_0$  angenommen und  $H_1$  verworfen oder umgekehrt.

### 3.11.1 Fehler 1. Art

Was ein Fehler 1. Art ist, wurde bereits im zugehörigen Kapitel zum einseitigen Hypothesentest behandelt (bei Bedarf nochmal nachlesen).

Da beim zwei-/beidseitigen Hypothesentest im Ablehnungsbereich **sowohl die linke als auch die rechte Seite** betrachtet werden, hängt die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein **Fehler 1. Art** bei einem beidseitigen Hypothesentest auftritt (man spricht auch von der **Irrtumswahrscheinlichkeit**) von der Wahl der beiden **kritischen Werte**  $k_{links}$  und  $k_{rechts}$  ab, ab denen die Nullhypothese  $H_0$  angenommen wird. Die **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  sind somit die Werte im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ , die den Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links und rechts vom Annahmebereich  $A$  „trennen“.

Bei einem zwei-/beidseitigen Hypothesentest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit den beiden **kritischen Werten**  $k_l$  und  $k_r$ , berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit** gemäß der Binomialverteilung  $(n, p_0)$ :

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k_l) + P(X \geq k_r) = P(X \leq k_l) + 1 - P(X \leq k_r - 1)$$

**Beispiel.** Laut einer Umfrage vor 2 Jahren gehen 60% der volljährigen Schüler(innen) jedes Wochenende feiern. An einer Schule wollen die Abiturienten überprüfen, ob diese Quote sich dieses Jahr geändert hat. Dafür befragen sie 50 volljährige Schüler(innen) an ihrer Schule und legen fest, wenn weniger als 22 oder mehr als 35 angeben, dass sie jedes Wochenende feiern gehen, so wird die Aussage der Umfrage verworfen und die Quote hat sich geändert. Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen beidseitigen Hypothesentest (Keyword: „geändert“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,6$  und einem Stichprobenumfang  $n = 50$  dar:

$$H_0 : p = 0,6$$

$$H_1 : p \neq 0,6$$

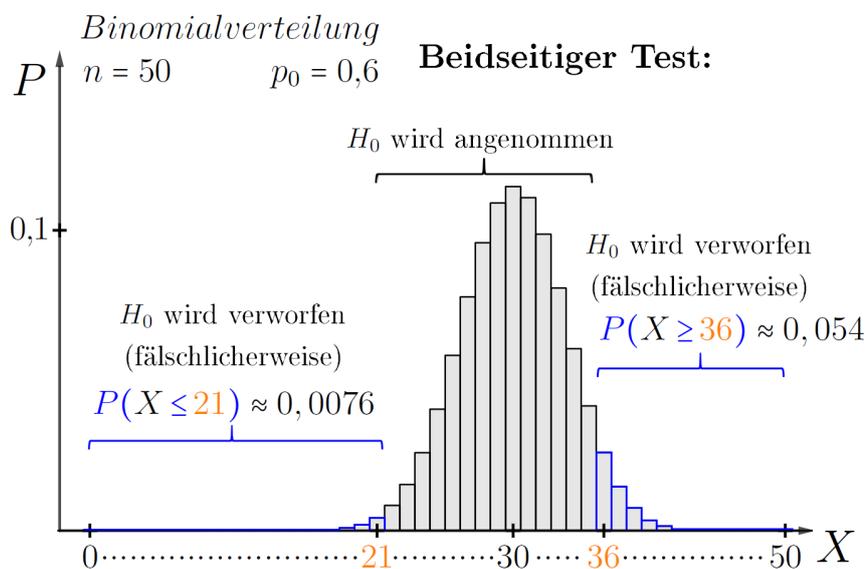
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$\overline{A} = \{22, 23, \dots, 34, 35\} \text{ und}$$

$$\overline{A} = \underbrace{\{0, 1, \dots, 20, 21\}}_{\text{linke Seite}} \cup \underbrace{\{36, 37, \dots, 49, 50\}}_{\text{rechte Seite}} \Rightarrow \text{in diesem Fall } k_l = 21 \text{ und } k_r = 36$$

Für die beiden **kritischen Werte**  $k_l = 21$  und  $k_r = 36$  ist die **Irrtumswahrscheinlichkeit/Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art**: (entweder mit TR oder Blick in die F-Tabelle-Binomialverteilung)

$$P(X \leq 21) + 1 - P(X \leq 36 - 1) = P(X \leq 21) + 1 - P(X \leq 35) \approx 0,0076 + 1 - 0,946 = 0,0616$$



Wahrscheinlichkeit Fehler 1. Art/  
Irrtumswahrscheinlichkeit:  $P(X \leq 21) + P(X \geq 36) = 0,0616$

### 3.11.2 Signifikanzniveau

Bei der Durchführung eines Hypothesentests ist man sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit gering zu halten. Dabei soll aber der Test aussagekräftig/signifikant sein. Das **Signifikanzniveau  $\alpha$**  eines Hypothesentests ist GLEICH der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit und berechnet sich dementsprechend GLEICH:

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$\alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k_l) + P(X \geq k_r) = \underbrace{P(X \leq k_l)}_{\text{linke Seite}} + \underbrace{1 - P(X \leq k_r - 1)}_{\text{rechte Seite}}$$

In der Wissenschaft wird in der Regel bei den meisten Hypothesentests, je nach Größe der Stichprobe ( $n$ ), ein **Signifikanzniveau** von  $\alpha = 10\%$  (0,1),  $\alpha = 5\%$  (0,05) oder  $\alpha = 1\%$  (0,01) verwendet. Auf diesem Niveau sind die Ergebnisse der Tests „aussagekräftig“.

Daher ist oft eine Aufgabenstellung, den Annahme- und Ablehnungsbereich eines zwei-/beidseitigen Hypothesentests so zu wählen, dass ein bestimmtes **Signifikanzniveau** (meist  $\alpha = 5\%$ ) erfüllt ist. Es geht darum, die beiden **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  (die links und rechts den Ablehnungsbereich vom Annahmebereich „trennen“) so zu wählen, dass das vorher festgelegte **Signifikanzniveau** erfüllt ist. Da das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  sich durch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet und diese Irrtumswahrscheinlichkeit beim zweiseitigen Hypothesentest sich aus zwei Wahrscheinlichkeiten der linken und rechten Seite des Ablehnungsbereichs  $\bar{A}$  zusammensetzt, teilt man das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  „in 2 Hälften“ auf  $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$  und wählt/berechnet die beiden gesuchten Werte  $k_l$  und  $k_r$  so, dass für den linken und rechten Ablehnungsbereich jeweils  $\frac{\alpha}{2}$  erfüllt ist:

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$\text{Linke Seite: } P(X \leq k_l) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Rechte Seite: } 1 - P(X \leq k_r - 1) \leq \frac{\alpha}{2} \quad | \quad + P(X \leq k_r - 1) \quad | \quad - \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} \leq P(X \leq k_r - 1)$$

$$\Rightarrow P(X \leq k_r - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Zusammengesetzt: } \underbrace{P(X \leq k_l)}_{\leq \frac{\alpha}{2}} + \underbrace{1 - P(X \leq k_r - 1)}_{\leq \frac{\alpha}{2}} \leq \alpha$$

Beim beidseitigen Test wählt man bei der linken Seite „ $\leq \frac{\alpha}{2}$ “ und bei der rechten Seite „ $\geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ “ deshalb, da die **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  nur ganze Werte annehmen können (Nur ganze Zahlen, NICHT „Kommazahlen“) und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art/ Irrtumswahrscheinlichkeit das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  nicht überschreiten soll. Für die linke Seite sucht man also die **größtmögliche ganze Zahl** als **kritischen Wert**  $k_l$  und für die rechte Seite die **kleinstmögliche ganze Zahl** als **kritischen Wert**  $k_r$ , für die die **Ungleichung** erfüllt ist.

**Beispiel.** In der sonnigen Stadt Karlsruhe fahren 20% aller Schüler(innen) mit dem Fahrrad zur Schule. In einer aktuellen Umfrage unter 100 zufällig befragten Schüler(inne)n in Karlsruhe gaben 29 an, das Fahrrad für den Schulweg zu nutzen. Die Ergebnisse der Umfrage sollen mit einem Signifikanzniveau von 5% ausgewertet werden. Wird  $H_0$  nach Auswertung angenommen oder verworfen?

Diese Überprüfung stellt einen zwei-/beidseitigen Hypothesentest mit „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$ , einem Stichprobenumfang  $n = 100$  und einem **Signifikanzniveau**  $\alpha = 0,05$  dar:

$$H_0 : p = 0,2$$

$$H_1 : p \neq 0,2$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welche **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  gilt:

$$\underbrace{P(X \leq k_l)}_{\leq \frac{0,05}{2}} + \underbrace{1 - P(X \leq k_r - 1)}_{\leq \frac{0,05}{2}} \leq 0,05, \text{ also: } P(X \leq k_l) \leq 0,025 \text{ und } P(X \leq k_r - 1) \geq 0,975 ?$$

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert  $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,2 = 20$ . Auf der linken Seite **muss  $k_l$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k_l$  liegt links vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k_l)$  für die „möglichen  $k_l$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 100$  der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 0,2$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **kleiner als**  $E(X)$  ein („mögliche  $k$ 's“, in dem Fall  $X = 19, 18, \dots, 11, 10$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k_l) \leq 0,025$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k_l$** . Falls  $P(X \leq k_l)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch größer als  $0,025$  ist, so müsst ihr so lange immer weitere, kleinere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k_l) \leq 0,025$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Auf der linken Seite **muss  $k_l$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k_l$  liegt links vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k_l) \leq 0,025$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k_l$** .

Da  $P(X \leq 12) = 0,0253 > 0,025$  und  $P(X \leq 11) = 0,0125 \leq 0,025$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k_l = 11$** .

Auf der rechten Seite **muss  $k_r$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k_r$  liegt rechts vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k_r - 1)$  für die „möglichen  $k_r$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 100$  der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 0,2$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **größer als**  $E(X)$  ein („mögliche  $k_r$ 's“, in dem Fall  $X = 21, 22, \dots, 29, 30$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k_r - 1) \geq 0,975$  ist. Dieses  $X + 1$  (!!!) ist der gesuchte **kritische Wert  $k_r$** . Falls  $P(X \leq k_r - 1)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch kleiner als  $0,975$  ist, so müsst ihr so lange immer weitere, größere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k_r - 1) \geq 0,975$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Auf der rechten Seite **muss  $k_r$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k_r$  liegt rechts vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k_r - 1) \geq 0,975$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k_r$** .

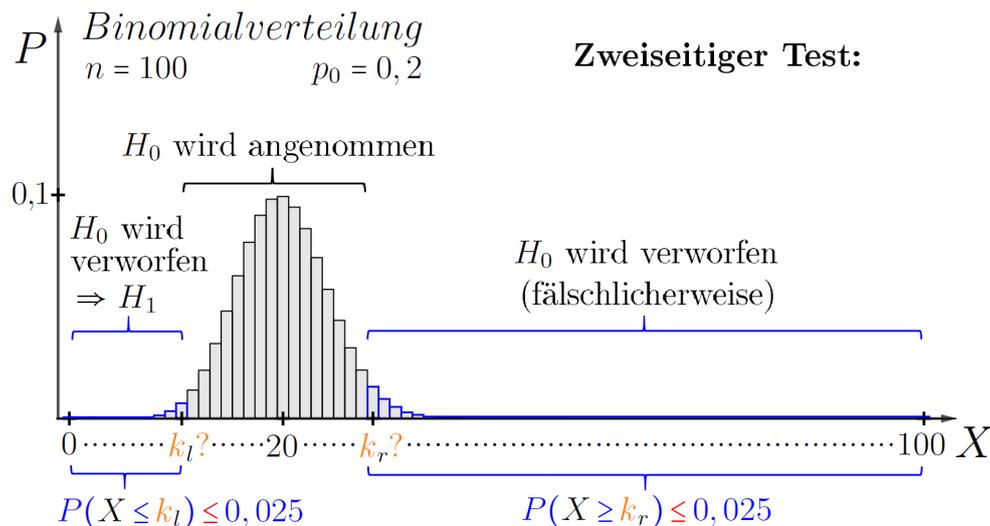
Da  $P(X \leq 27) = 0,9658 < 0,975$  und  $P(X \leq 28) = 0,9799 \geq 0,975$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k_r = 29 - 1 = 28$**  (da  $k_r - 1 = 28$ ).

Damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{12, 13, \dots, 27, 28\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \underbrace{\{0, 1, \dots, 10, 11\}}_{\text{linke Seite}} \cup \underbrace{\{29, 30, \dots, 99, 100\}}_{\text{rechte Seite}}$$

**Antwort:** „Die Nullhypothese  $H_0$  wird verworfen, da 29 befragten Schüler(innen) angegeben haben mit dem Fahrrad zur Schule zu fahren.“ (29 liegt im Ablehnungsbereich)



### 3.11.3 Normalverteilung: Zweiseitiger Signifikanztest mit Sigma-Regeln

Bei der Durchführung eines Hypothesentests ist man sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit gering zu halten. Dabei soll aber der Test aussagekräftig/signifikant sein. Das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  eines Hypothesentests ist GLEICH der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit und berechnet sich dementsprechend GLEICH:

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$\alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k_l) + P(X \geq k_r)$$

In der Wissenschaft wird in der Regel bei den meisten Hypothesentests, je nach Größe der Stichprobe ( $n$ ), ein **Signifikanzniveau** von  $\alpha = 10\%$  (0,1),  $\alpha = 5\%$  (0,05) oder  $\alpha = 1\%$  (0,01) verwendet. Auf diesem Niveau sind die Ergebnisse der Tests „aussagekräftig“.

Daher ist oft eine Aufgabenstellung, den Annahme- und Ablehnungsbereich eines zwei-/beidseitigen Hypothesentests so zu wählen, dass ein bestimmtes **Signifikanzniveau** (meist  $\alpha = 5\%$ ) erfüllt ist. Es geht darum, die beiden **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  (die links und

rechts den Ablehnungsbereich vom Annahmehbereich „trennen“) so zu wählen, dass das vorher festgelegte **Signifikanzniveau** erfüllt ist. Da das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  sich durch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet und diese Irrtumswahrscheinlichkeit beim zweiseitigen Hypothesentest sich aus zwei Wahrscheinlichkeiten der linken und rechten Seite des Ablehnungsbereichs  $\bar{A}$  zusammensetzt, teilt man das **Signifikanzniveau**  $\alpha$  „in 2 Hälften“ auf  $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$  und wählt/berechnet die beiden gesuchten Werte  $k_l$  und  $k_r$  so, dass für den linken und rechten Ablehnungsbereich jeweils  $\frac{\alpha}{2}$  erfüllt ist:

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$\text{Linke Seite: } P(X \leq k_l) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Rechte Seite: } P(X \geq k_r) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Zusammengesetzt: } \underbrace{P(X \leq k_l)}_{\leq \frac{\alpha}{2}} + \underbrace{P(X \geq k_r)}_{\leq \frac{\alpha}{2}} \leq \alpha$$

Beim beidseitigen Test wählt man „ $\leq$ “ deshalb, da die **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  nur ganze Werte annehmen können (Nur ganze Zahlen, NICHT „Kommazahlen“). Für die linke Seite sucht man also die **größtmögliche ganze Zahl** als **kritischen Wert**  $k_l$  und für die rechte Seite die **kleinstmögliche ganze Zahl** als **kritischen Wert**  $k_r$ , für die die **Ungleichung** erfüllt ist.

Ist die Laplace Bedingung erfüllt, kann die in der Aufgabenstellung vorliegende Binomialverteilung  $Bin(n, p)$  durch die zugehörige Normalverteilung  $N(\mu, \sigma)$  angenähert werden und die beiden gesuchten **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  bei einem gegebenen **Signifikanzniveau**  $\alpha$  mithilfe der Sigma-Regeln ermittelt werden.

Die beiden **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  sind so zu wählen, dass das vorher festgelegte **Signifikanzniveau** erfüllt ist. Da in der Regel mit dem **Signifikanzniveau**  $\alpha = 5\% = 0,05$  getestet wird, berechnen wir den **kritischen Wert**  $k$  im Folgenden mit der  $1,96\sigma$ -Umgebung ( $[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ ):

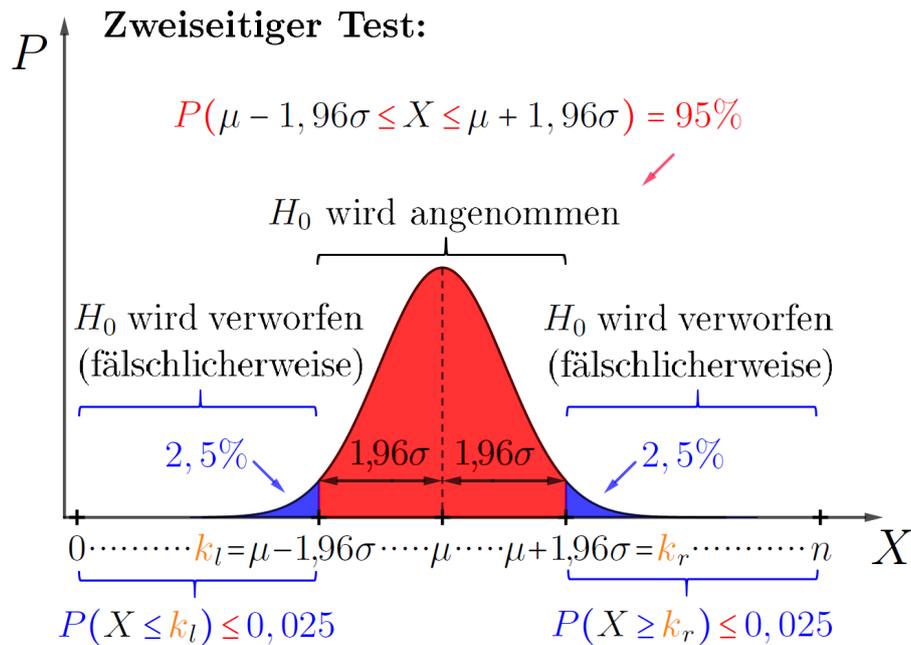
Zwei-/Beidseitiger Test:

$$k_l = \mu - 1,96\sigma$$

$$k_r = \mu + 1,96\sigma$$

**Hinweis:** Sollte eine Kommazahl für die **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  herauskommen, dann wird bei der linken Seite die Kommazahl **immer abgerundet** (z.B.  $k_l = 21,87 \rightarrow k_l = 21$ ), während bei der rechten Seite die Kommazahl **immer aufgerundet** wird (z.B.  $k_r = 42,15 \rightarrow k_r = 43$ ). Man nennt es auch das Runden zur sicheren Seite, damit die **Ungleichungen**  $P(X \leq k_l) \leq 0,025$  und  $P(X \geq k_r) \leq 0,025$  erfüllt sind.

$$\underbrace{\leq 0,025}_{=\frac{\alpha}{2}} \quad \underbrace{\leq 0,025}_{=\frac{\alpha}{2}}$$



**Beispiel.** Im Jahr 2018 haben laut einer Bildungsstudie 40% aller Schüler(innen) YouTube-Videos zur Lernunterstützung genutzt. 2 Jahre später soll diese Quote durch einen Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 5% überprüft werden, ob diese sich geändert hat oder nicht. Dafür werden 100 zufällig ausgewählte Schüler(innen) befragt, ob sie unterstützend Lernvideos auf YouTube nutzen. Wie lautet die Entscheidungsregel der Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen zwei-/beidseitigen Hypothesentest (Keyword: „geändert“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,4$ , einem Stichprobenumfang  $n = 100$  und einem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  dar:

$$H_0 : p = 0,4$$

$$H_1 : p \neq 0,4$$

Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

Die Frage ist, für welche **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  gilt:

$$\underbrace{P(X \leq k_l)}_{\leq \frac{0,05}{2}} + \underbrace{P(X \geq k_r)}_{\leq \frac{0,05}{2}} \leq 0,05, \text{ also: } P(X \leq k_l) \leq 0,025 \text{ und } P(X \geq k_r) \leq 0,025 ?$$

Ist die Laplace Bedingung erfüllt?

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)} = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} \approx 4,9 > 3$$

Die Laplace Bedingung ist erfüllt. Somit kann die Binomialverteilung  $Bin(100, 0,4)$  durch die Normalverteilung  $N(40, 4,9)$  angenähert werden ( $\mu = n \cdot p_0 = 100 \cdot 0,4 = 40$ ) und die Sigma-Regeln können angewendet werden. Also berechnen sich die **kritischen Werte**

$k_l$  und  $k_r$  bei diesem zwei-/beidseitigen Test mit dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  durch die  $1,96\sigma$ -Umgebung:

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$k_l = \mu - 1,96\sigma = 40 - 1,96 \cdot 4,9 = 30,396 \xrightarrow{\text{abrunden!!}} k_l = 30$$

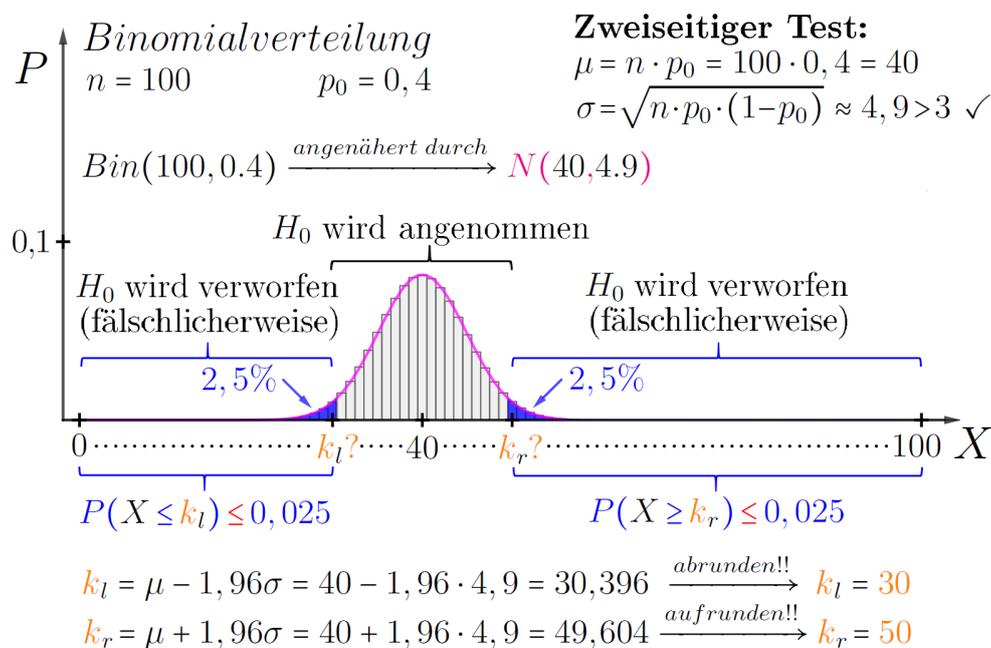
$$k_r = \mu + 1,96\sigma = 40 + 1,96 \cdot 4,9 = 49,604 \xrightarrow{\text{aufrunden!!}} k_r = 50$$

Damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{31, 32, \dots, 48, 49\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \underbrace{\{0, 1, \dots, 29, 30\}}_{\text{linke Seite}} \cup \underbrace{\{50, 51, \dots, 99, 100\}}_{\text{rechte Seite}}$$

**Antwort:** „Geben von den 100 befragten Schüler(innen) zwischen 31 und 49 an, dass sie YouTube-Videos lernunterstützend verwenden, so wird die Nullhypothese angenommen. Andernfalls bei 30 oder weniger sowie bei 50 oder mehr Angaben der 100 Schüler, dass sie YouTube-Videos benutzen, wird die Nullhypothese verworfen.“



### 3.11.4 Fehler 2. Art

Was ein Fehler 2. Art ist, wurde bereits im zugehörigen Kapitel zum einseitigen Hypothesentest behandelt (bei Bedarf nochmal nachlesen).

Da beim zwei-/beidseitigen Hypothesentest im Ablehnungsbereich **sowohl die linke als auch die rechte Seite** betrachtet werden, hängt die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein **Fehler 2. Art** bei einem beidseitigen Hypothesentest auftritt von der Wahl der beiden **kritischen Werte**  $k_{links}$  und  $k_{rechts}$  ab, ab denen die Nullhypothese  $H_0$  angenommen wird. Die **kritischen Werte**  $k_l$  und  $k_r$  sind somit die Werte im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ , die den Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links und rechts vom Annahmebereich  $A$  „trennen“.

Bei einem zwei-/beidseitigen Hypothesentest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der **eigentlich wahren** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1$  ( $p_0$  ist nicht wahr!), mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit den beiden **kritischen Werten**  $k_l$  und  $k_r$ , berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art** gemäß der **Binomialverteilung**  $(n, p_1)$ :

Zwei-/Beidseitiger Test:

$$P(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p_1}(k_l + 1 \leq X \leq k_r - 1) = P_{p_1}(X \leq k_r - 1) - P_{p_1}(X \leq k_l)$$

**Beispiel.** Eine Studie der Amore-Stiftung aus dem Jahr 2018 stellte damals mithilfe von 80 teilnehmenden Paaren fest, dass 30% aller Paare, die in diesem Jahr zueinander fanden, sich per Dating-App kennenlernten. 2 Jahre später vermutet die Amore-Stiftung eine Veränderung hin zu, dass 50% aller im Jahre 2020 „entstandenen“ Paare per Dating-App den ersten Kontakt hatten. Eine Umfrage mit derselben Anzahl von 80 Paaren, deren Kennenlerndatum im Jahr 2020 liegt, soll Aufschluss geben. Dabei soll derselbe Annahme- und Ablehnungsbereich aus dem Jahr 2018 verwendet werden, die damals mit einem Signifikanzniveau von 5% festgelegt wurden:

$$A = \{16, 17, \dots, 31, 32\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 14, 15\} \cup \{33, 34, \dots, 79, 80\}$$

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art nach Auswertung der Umfrage, also dass die Quote aus dem Jahr 2018 angenommen wird, obwohl die Vermutung der Amore-Stiftung wahr ist?

Diese Überprüfung stellt einen beidseitigen Hypothesentest (Keyword: „Veränderung“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,3$  und einem Stichprobenumfang  $n = 80$  dar:

$$H_0 : p = 0,6$$

$$H_1 : p \neq 0,6$$

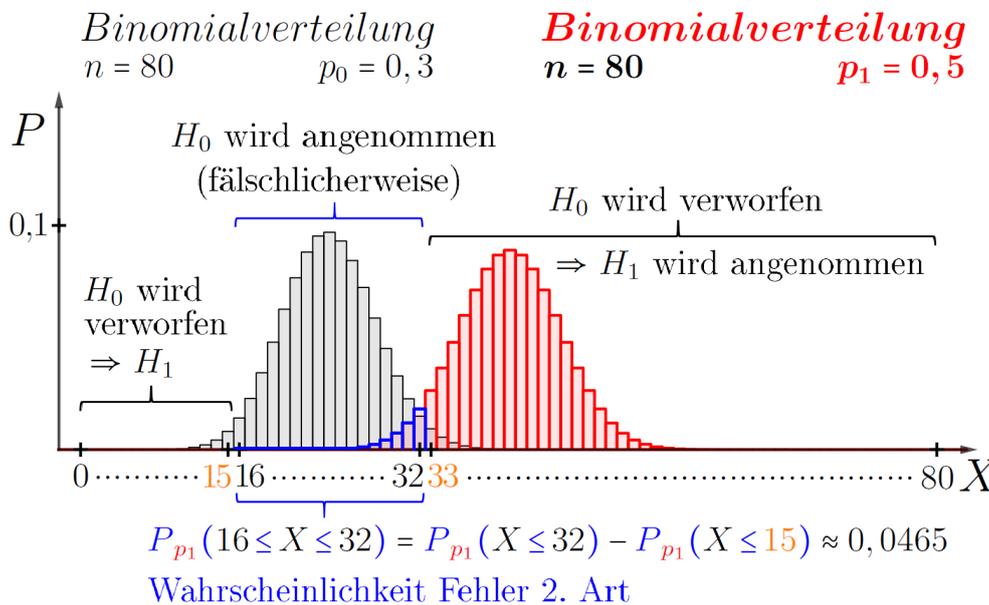
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$  (aus Aufgabenstellung):

$$A = \{16, 17, \dots, 31, 32\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \underbrace{\{0, 1, \dots, 14, 15\}}_{\text{linke Seite}} \cup \underbrace{\{33, 34, \dots, 79, 80\}}_{\text{rechte Seite}} \Rightarrow \text{in diesem Fall } k_l = 15 \text{ und } k_r = 33$$

Für die beiden **kritischen Werte**  $k_l = 15$  und  $k_r = 33$  und die **eigentlich wahre** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1 = 0,5$  ist die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art**: (entweder mit TR oder Blick in die F-Tabelle-Binomialverteilung)

$$P_{p_1}(X \leq 33 - 1) - P_{p_1}(X \leq 15) = P_{p_1}(X \leq 32) - P_{p_1}(X \leq 15) \approx 0,0465 - 0 = 0,0465$$



### 3.12 Alternativtest

Beim Alternativtest wird anhand einer Stichprobe mit dem Umfang  $n$  getestet, ob die in der Aufgabenstellung getroffene Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , in einem **Bernoulli-Experiment** einen „Treffer“ zu landen, in der Stichprobe zutrifft ( $p = p_0$ ) oder ob die andere in der Aufgabenstellung getroffene Aussage über eine **alternative** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1$  ( $p = p_1$ ) in der Stichprobe zutrifft. In der Aufgabenstellung steht also NICHT, ob  $p_0$  sich „geändert/verändert, verringert o. vergrößert hat, mindestens o. höchstens so groß ist“, sondern es ist eine **alternative** Aussage  $p_1$  gegeben.

**Nullhypothese  $H_0$ :** Die Nullhypothese beinhaltet die Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde.

Alternativtest:  $H_0 : p = p_0$

**Gegenhypothese  $H_1$ :** Die Gegen-/Alternativhypothese beinhaltet die Aussage über die **alternative** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1$ , die in der Aufgabenstellung getroffen wurde.

Alternativtest:  $H_1 : p = p_1$

**Entscheidungsregel (Annahme- und Ablehnungsbereich):** Beim Alternativtest betrachtet man immer eine sogenannte Testgröße  $X$ , welche die Anzahl der „Treffer“ in der Stichprobe der Länge  $n$ , angibt. Je nachdem welchen Wert diese Testgröße in der Stichprobe annimmt, wird die Nullhypothese  $H_0$  als wahr angenommen und die Gegenhypothese  $H_1$  verworfen/abgelehnt oder andersherum wird die Nullhypothese  $H_0$  verworfen/abgelehnt und die Gegenhypothese  $H_1$  als wahr angenommen.

**Beispiel.** Laut einer Studie der Amore-Stiftung nutzen 20% aller volljährigen Singles eine Dating-App. Der Vorstand des Dating-Vereins „Liebesglück“ ist sich sicher, dass 30% der volljährigen Singles eine Dating-App verwenden. Eine Straßenumfrage mit 30 zufällig ausgesuchten volljährigen Singles soll Klarheit verschaffen. Es wird festgelegt, wenn höchstens 8 Singles eine Dating-App nutzen, stimmt die Aussage der Amore-Stiftung.

1. Aufstellen der Nullhypothese  $H_0$  und ihrer Gegenhypothese  $H_1$ :

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,2$  sowie alternative Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,3$ , einen volljährigen „datingapp-nutzenden“ Single zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **Alternativtest** mit den beiden Hypothesen auf:

$$H_0 : p = 0,2$$

$$H_1 : p = 0,3$$

2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von  $n = 30$  befragten Singles. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 30 „datingapp-nutzende“ Singles (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich  $A$  und Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  lautet bei diesem Alternativtest somit:

$$A = \{0, 1, \dots, 7, 8\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{9, 10, \dots, 29, 30\}$$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße  $X$  (Anzahl der feierwütigen Schüler(inn)en in der Stichprobe mit  $n = 30$  befragten Singles annimmt, wird  $H_0$  angenommen und  $H_1$  verworfen oder umgekehrt.

### 3.12.1 Fehler 1. und 2. Art

Was ein Fehler 1. Art und Fehler 2. Art ist, wurde bereits in den zugehörigen Kapiteln zum einseitigen Hypothesentest behandelt (bei Bedarf nochmal nachlesen).

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein **Fehler 1. Art** oder **Fehler 2. Art** bei einem Alternativtest auftritt, hängt von der Wahl des **kritischen Werts  $k$**  ab, ab dem die Nullhypothese

$H_0$  angenommen wird. Der **kritische Wert**  $k$  ist somit der Wert im Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ , der den Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  vom Annahmebereich  $A$  „trennt“. Je nachdem, ob der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  rechts vom Annahmebereich  $A$  liegt ( $p_1$  ist größer als  $p_0$ ), ist  $k$  also der kleinste Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  und wenn andersherum der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links vom Annahmebereich  $A$  liegt ( $p_1$  ist kleiner als  $p_0$ ), ist  $k$  der größte Wert des Ablehnungsbereich  $\bar{A}$ .

Bei einem Alternativtest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0$ , mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit dem **kritischen Wert**  $k$  berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit** für einen Fehler 1. Art/**Irrtumswahrscheinlichkeit** gemäß der Binomialverteilung  $(n, p_0)$ :

$$\bar{A} \text{ liegt rechts von } A (p_1 > p_0) : P_{p_0}(\text{Fehler 1. Art}) = P_{p_0}(X \geq k) = 1 - P_{p_0}(X \leq k - 1)$$

$$\bar{A} \text{ liegt links von } A (p_1 < p_0) : P_{p_0}(\text{Fehler 1. Art}) = P_{p_0}(X \leq k)$$

Bei einem Alternativtest mit der binomialverteilten Testgröße  $X$ , mit der **alternativen** „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1$ , mit der Stichprobenlänge  $n$  und mit dem **kritischen Wert**  $k$  berechnet sich die **Wahrscheinlichkeit** für einen Fehler 2. Art gemäß der **Binomialverteilung**  $(n, p_1)$ :

$$\bar{A} \text{ liegt rechts von } A (p_1 > p_0) : P_{p_1}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p_1}(X \leq k - 1)$$

$$\bar{A} \text{ liegt links von } A (p_1 < p_0) : P_{p_1}(\text{Fehler 2. Art}) = P_{p_1}(X \geq k + 1) = 1 - P_{p_1}(X \leq k)$$

**Beispiel.** Laut einer Studie der Amore-Stiftung nutzen 20% aller volljährigen Singles eine Dating-App. Der Vorstand des Dating-Vereins „Liebesglück“ ist sich sicher, dass 30% der volljährigen Singles eine Dating-App verwenden. Eine Straßenumfrage mit 30 zufällig ausgesuchten volljährigen Singles soll Klarheit verschaffen. Es wird festgelegt, wenn höchstens 8 Singles eine Dating-App nutzen, stimmt die Aussage der Amore-Stiftung. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art und wie hoch für einen Fehler 2. Art?

Diese Überprüfung stellt einen Alternativtest mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  und alternativer Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,3$  sowie einem Stichprobenumfang  $n = 30$  dar:

$$H_0 : p = 0,2$$

$$H_1 : p = 0,3$$

Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese  $H_0$ :

$$A = \{0, 1, \dots, 7, 8\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{9, 10, \dots, 29, 30\}$$

$$\underbrace{\{0, 1, \dots, 7, 8\}}_A \quad \underbrace{\{9, 10, \dots, 29, 30\}}_{\bar{A} \text{ liegt rechts}}$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 9$  und die **eigentlich wahre** „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,2$  ist die **Irrtumswahrscheinlichkeit/ Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art**: (entweder mit TR oder Blick in die F-Tabelle- Binomialverteilung)

$$P_{p_0}(X \geq 9) = 1 - P_{p_0}(X \leq 9 - 1) = 1 - P_{p_0}(X \leq 8) \approx 1 - 0,8713 = 0,1287$$

Für den **kritischen Wert**  $k = 9$  und die **eigentlich wahre** alternative „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1 = 0,3$  ist die **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art**: (entweder mit Taschenrechner oder Blick in die F-Tabelle der Binomialverteilung)

$$P_{p_1}(X \leq 9 - 1) = P_{p_1}(X \leq 8) \approx 0,4315$$

**Beispiel.** Laut einer Studie der Amore-Stiftung nutzen 40% aller volljährigen Singles eine Dating-App. Der Vorstand des Dating-Vereins „Liebesglück“ ist sich sicher, dass nur 30% der volljährigen Singles eine Dating-App verwenden. Eine Straßenumfrage mit 50 zufällig ausgesuchten volljährigen Singles soll Klarheit verschaffen. Wie lautet die Entscheidungsregel, wenn

- die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kleiner als 5% sein soll?
- die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art kleiner als 5% sein soll?

Diese Überprüfung stellt einen Alternativtest mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,4$  und alternativer Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,3$  sowie einem Stichprobenumfang  $n = 50$  dar:

$$H_0 : p = 0,4$$

$$H_1 : p = 0,3$$

- Da  $p_1 = 0,3$  kleiner ist als  $p_0 = 0,4$  ist die Frage, für welchen **kritischen Wert**  $k$  gilt mit der **eigentlich wahren** „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_0 = 0,4$ :

$$\begin{aligned} P_{p_0}(\text{Fehler 1. Art}) &\leq 0,05 \\ P_{p_0}(X \leq k) &\leq 0,05 ? \end{aligned}$$

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert  $E(X) = n \cdot p_0 = 50 \cdot 0,4 = 20$ . Liegt der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links von dem Annahmebereich  $A$  ( $0,3 < 0,4$ ) **muss  $k$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt links vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  für die „möglichen  $k$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 50$  der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,4$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **kleiner als**  $E(X)$  ein („mögliche  $k$ 's“, in dem Fall  $X = 20, 19, \dots, 11, 10$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert**  $k$ . Falls  $P(X \leq k)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch größer als  $0,05$  ist, so müsst ihr so lange

immer weitere, kleinere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Liegt der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links von dem Annahmehereich  $A$  ( $0,3 < 0,4$ ) **muss  $k$  kleiner sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt links vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \leq 0,05$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k$** .

Da  $P(X \leq 14) = 0,0539 > 0,05$  und  $P(X \leq 13) = 0,0279 \leq 0,05$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k = 13$**  und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{14, 15, \dots, 49, 50\} \text{ und} \\ \bar{A} = \{0, 1, \dots, 12, 13\}$$

**Hinweis:** Habt ihr einen grafikfähigen Taschenrechner zur Verfügung, lässt sich die Liste von „möglichen  $k$ 's“ und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  direkt für alle  $X$ -Werte erstellen, indem ihr die Anwendung „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ als eine Funktion mit der Variable  $x$ ,  $n = 50$  und  $p = 0,4$  in eurem Taschenrechner definiert. Anschließend könnt ihr euch die Wertetabelle dieser Funktion für  $X = 0, 1, \dots, 49, 50$  ausgeben lassen und direkt schauen, für welchen **kritischen Wert  $k$**   $P(X \leq k) \leq 0,05$  gilt.

b) Da  $p_1 = 0,3$  kleiner ist als  $p_0 = 0,4$  ist die Frage, für welchen **kritischen Wert  $k$**  gilt mit der **eigentlich wahren** „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p_1 = 0,3$ :

$$\begin{aligned} P_{p_1}(\text{Fehler 2. Art}) &\leq 0,05 \\ 1 - P_{p_1}(X \leq k) &\leq 0,05 \quad | -0,05 + P_{p_1}(X \leq k) \\ P_{p_1}(X \leq k) &\geq 0,95 \quad ? \end{aligned}$$

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert  $E(X) = n \cdot p_1 = 50 \cdot 0,3 = 15$ . Liegt der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links von dem Annahmehereich  $A$  ( $0,3 < 0,4$ ) **muss  $k$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt rechts vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf“ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  für die „möglichen  $k$ 's“ berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge  $n = 50$  der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_1 = 0,3$  und für  $X$  nacheinander die ersten zehn Zahlen **größer als  $E(X)$**  ein („mögliche  $k$ 's“, in dem Fall  $X = 15, 16, \dots, 24, 25$ ). Nun schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \geq 0,95$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k$** . Falls  $P(X \leq k)$  für alle eingegebenen  $X$ -Werte noch kleiner als 0,95 ist, so müsst ihr so lange immer weitere, größere Werte für  $X$  eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis  $P(X \leq k) \geq 0,95$  ist.

Habt ihr die F-Tabelle der zugehörigen Binomialverteilung zur Verfügung geht ihr genauso vor. Liegt der Ablehnungsbereich  $\bar{A}$  links von dem Annahmehereich  $A$  ( $0,3 < 0,4$ ) **muss  $k$  größer sein** als der Erwartungswert ( $k$  liegt rechts vom Erwartungswert). Also schaut ihr bei welchem  $X$   $P(X \leq k) \geq 0,95$  ist. Dieses  $X$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k$** .

Da  $P(X \leq 19) = 0,9151 < 0,9$  und  $P(X \leq 20) = 0,9522 \geq 0,95$  ist der gesuchte **kritische Wert  $k = 20$**  und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:

$$A = \{21, 22, \dots, 49, 50\} \text{ und}$$

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 19, 20\}$$

**Hinweis:** Habt ihr einen grafikfähigen Taschenrechner zur Verfügung, lässt sich die Liste von „möglichen  $k$ 's“ und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $P(X \leq k)$  direkt für alle  $X$ -Werte erstellen, indem ihr die Anwendung „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ als eine Funktion mit der Variable  $x$ ,  $n = 50$  und  $p = 0,3$  in eurem Taschenrechner definiert. Anschließend könnt ihr euch die Wertetabelle dieser Funktion für  $X = 0, 1, \dots, 49, 50$  ausgeben lassen und direkt schauen, für welchen **kritischen Wert  $k$**   $P(X \leq k) \geq 0,95$  gilt.

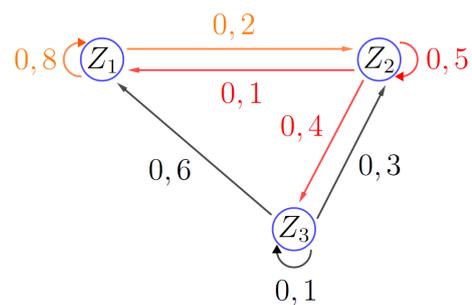
### 3.13 Stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse beschreiben Systeme, die in regelmäßig aufeinander folgenden Zeitpunkten mit konstanten/immer gleichen Wahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen wechseln und dabei eventuell irgendwann zur Ruhe kommen.

#### 3.13.1 Übergangsdigramm/-graph

Die Zustandsänderungen lassen sich sehr anschaulich durch Übergangsdigramme/-graphen oder Übergangsmatrizen darstellen. In einem Übergangsdigramm werden Zustände und deren Übergangswahrscheinlichkeiten, mit denen ein Objekt von dem einen in einen anderen Zustand wechselt, dargestellt. Oder das Übergangsdigramm gibt die Anteile der Objekte an, die während eines Zeitraums von einem Verteilungszustand in einen anderen übergehen.

Die einzelnen möglichen Zustände  $Z_1, Z_2, \dots$  werden im Übergangsdigramm in **Kreisen** gekennzeichnet. Ein Pfeil bedeutet einen Übergang z.B. **von** Zustand  $Z_2 \rightarrow$  **nach** Zustand  $Z_3$ . Ein Pfeil als „Halbkreis“, der wieder in denselben Zustand „führt“, bedeutet, dass das Objekt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit/einem gewissen Anteil in dem gleichen Zustand verbleibt. Die Zahlen auf den Pfeilen geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit/welchem Anteil Objekte von einem Zustand in einen anderen wechseln. Für alle Pfeile, die von einem Zustand „weggehen“ (Dazu zählt auch der Pfeil, der wieder in denselben Zustand zurückführt!) gilt, dass deren Summe **immer 1 ergeben muss!**





$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C \text{ (Ergebnismatrix hat 2 Zeilen und 2 Spalten)}$$

Die Berechnung der einzelnen Einträge der Ergebnismatrix erfolgt jeweils durch Verrechnung der einzelnen **Zeilen** der linken Matrix mit den einzelnen **Spalten** der rechten Matrix als Skalarprodukt, wie folgt:

Berechnung des Eintrags 1. Zeile, 1. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 1. Zeile, 2. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 2. Zeile, 1. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 2. Zeile, 2. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & 4 & & \end{pmatrix}$$

**Matrix-Vektor-Produkt:** Um eine Matrix mit einem Vektor multiplizieren zu können, muss die Spaltenanzahl der Matrix **links** vom Malzeichen gleich der Zeilenanzahl des Vektors **rechts** vom Malzeichen sein. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist **immer** ein Vektor, der sogenannte Ergebnisvektor. Der Ergebnisvektor nach der Multiplikation hat genau so viele Zeilen, wie die linke Matrix. Z.B.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

$$\text{Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 1 Spalte)}$$

Das Produkt  $A \cdot \vec{v}$  ist möglich, da die linksstehende Matrix  $A$  **drei Spalten** besitzt und der rechtsstehende Vektor  $\vec{v}$  die gleiche Anzahl an **Zeilen (3)** besitzt. Für den Ergebnisvektor gilt somit:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ (Ergebnisvektor hat 3 Zeilen)}$$

Die Berechnung der einzelnen Einträge des Ergebnisvektors erfolgt analog zur Matrixmultiplikation, jeweils durch Verrechnung der einzelnen **Zeilen** der linksstehenden Matrix mit dem rechtsstehenden Vektor als Skalarprodukt, wie folgt:

Berechnung 1. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Berechnung des 2. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Berechnung des 3. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

**Potenzieren von Matrizen:** Um eine Matrix mit sich selbst multiplizieren zu können, muss sie **quadratisch** sein. D.h. damit eine Matrix potenziert werden kann, muss sie die gleiche Anzahl an Zeilen, wie Spalten haben (dann spricht man von einer quadratischen Matrix). Die Ergebnismatrix hat folglich genau so viele Zeilen und Spalten, wie die zu potenzierende Matrix. Z.B.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

Das Potenzieren von  $A$ , z.B.  $A^2$  oder  $A^3$  usw., ist möglich, da die Matrix  $A$  quadratisch ist (3 Zeilen und 3 Spalten). Die Berechnung der Ergebnismatrix erfolgt analog zur Matrixmultiplikation. Z.B. ist  $A^2$  folglich:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Ergebnismatrix hat } \\ \text{3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

### 3.13.3 Stochastische Übergangsmatrix, Zustandsvektor und Folgeverteilung, Vorherige Verteilung/Rückwärts-Rechnen

Die Zustandsänderungen eines stochastischen Prozesses lassen sich sehr anschaulich durch Übergangsdigramme/-graphen oder stochastischen Übergangsmatrizen darstellen. In einer stochastischen Übergangsmatrix werden die Übergangswahrscheinlichkeiten, mit denen ein Objekt von dem einen in einen anderen Zustand wechselt, tabellarisch dargestellt. Die stochastische Übergangsmatrix kann auch die Anteile der Objekte angeben, die während eines Zeitraums von einem Verteilungszustand in einen anderen Übergehen.

In der stochastischen Übergangsmatrix werden zeilenweise die Zugänge in einen Zustand (**nach**) und spaltenweise die Abgänge aus einem Zustand (**von**) notiert. In einer stochastischen Übergangsmatrix **gilt immer**:

1. Sie ist quadratisch (gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten)
2. Ihre Einträge liegen zwischen 0 und 1
3. Die Summe jeder Spalte ergibt 1

Beispiel einer stochastischen Übergangsmatrix  $U$  mit 3 Zuständen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

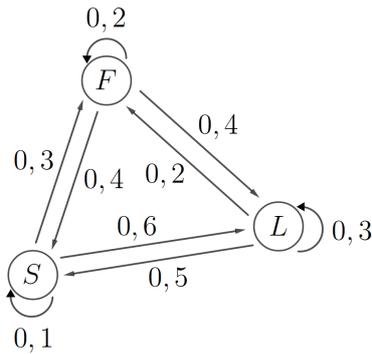
$$\begin{array}{c} \text{nach} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} \text{von} \\ A & B & C \\ 0,3 & 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} = U \text{ (Übergangsmatrix)}$$

Summe:      = 1      = 1      = 1

Eine Übergangsmatrix lässt sich auch aus einem Übergangsdigramm übertragen, was im folgenden Beispiel durchgeführt wird.

**Beispiel.** In einem kleinen 24h-Freizeitpark, bestehend aus 3 Achterbahnen, sind täglich 1000 Besucher. Diese 1000 Besucher verteilen sich auf die 3 Achterbahnen (und ihre Warteschlangen) mit den Namen „Free-Fall“ (F), „Looping“ (L) und „Speedo“ (S). Im Laufe des letzten Monats hat sich gezeigt, dass es zwischen den 3 Achterbahnen (und ihren Warteschlangen) von Stunde zu Stunde Verschiebungen der Besucher gibt. Das untenstehende Übergangsdigramm beschreibt diese stündlichen Verschiebungen.

Bestimme die Übergangsmatrix  $U$ .



Die 3 Achterbahnen ( $F$ ,  $L$ ,  $S$ ) sind die 3 Zustände, in denen sich die Besucher des Freizeitparks befinden können. Die Pfeile an den Zuständen geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der Besucher **von** einem Zustand  $\rightarrow$  **nach** einem Zustand wechseln. Daraus ergibt sich die folgende Übergangsmatrix  $U$ :

$$\begin{array}{c} \text{von} \\ F \quad L \quad S \\ \text{nach} \end{array} \begin{array}{c} F \\ L \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} = U$$

$$\text{Summe:} \quad = 1 \quad = 1 \quad = 1 \quad \checkmark$$

Der **Zustandsvektor**  $\vec{v}$  gibt die Verteilung aller Besucher auf die Zustände/Achterbahnen an. Am Anfang befinden sich 290 Besucher in der Speedo, 240 Besucher in der Free-Fall und 470 Besucher in der Looping Achterbahn. (**Hinweis:** Der Zustandsvektor **muss** nach derselben Zustands-Reihenfolge, wie in der Übergangsmatrix aufgestellt werden!) Somit ergibt sich für die Anfangsverteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$ :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F \\ L \\ S \end{array}$$

Die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_2$  nach einer Stunde erhält man durch Multiplikation der Übergangsmatrix  $U$  mit der vorhergehenden Verteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$ :

$$U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229 \\ 411 \\ 360 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$$

Die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_3$  nach noch einer weiteren Stunde, also nach 2 Stunden vom Anfang betrachtet, erhält man durch Multiplikation der Übergangsmatrix  $U$  mit der vorhergehenden Verteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_2$ :

$$U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 229 \\ 411 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236 \\ 430,9 \\ 333,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 236 \\ 431 \\ 333 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Hat man einen Taschenrechner zur Verfügung gibt es eine schnelle Möglichkeit die Folgeverteilungen zu berechnen. Für die Folgeverteilung  $\vec{v}_3$  nach **2** Stunden gilt, da  $U \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ :

$$U \cdot \vec{v}_2 = U \cdot \underbrace{U \cdot \vec{v}_1}_{\vec{v}_2} = U^2 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^2}_{\text{Taschenrechner}} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236 \\ 430,9 \\ 333,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 236 \\ 431 \\ 333 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Somit gilt für die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_4$  nach **3** Stunden, da  $U^2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_3$ :

$$U \cdot \vec{v}_3 = U \cdot \underbrace{U^2 \cdot \vec{v}_1}_{\vec{v}_3} = U^3 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^3}_{\text{Taschenrechner}} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233,31 \\ 423,53 \\ 343,16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 233 \\ 424 \\ 343 \end{pmatrix} = \vec{v}_4$$

Wie ist die Folgeverteilung demnach nach **9** Stunden?

$$U^9 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^9}_{\text{Taschenrechner}} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234,04 \\ 425,53 \\ 340,42 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 234 \\ 426 \\ 340 \end{pmatrix}$$

Statt der Folgeverteilung kann man auch die **vorherige Verteilung** durch „**Rückwärts-Rechnen**“ ermitteln. Möchte man „zurückschauen“ und die Verteilung  $\vec{v}_0$  eine Stunde vor der Anfangsverteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$  berechnen, gibt es dafür 2 Möglichkeiten.

1. Mithilfe eines Linearen Gleichungssystems, da  $U \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$ :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0,2x + 0,2y + 0,3z = 240 \\ 0,4x + 0,3y + 0,6z = 470 \\ 0,4x + 0,5y + 0,1z = 290 \end{array}$$

Der Taschenrechner liefert die Lösung  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$

2. Mithilfe der inversen Matrix  $U^{-1}$ . Es gilt für die **vorherige Verteilung**  $\vec{v}_0$  vor **-1** Stunde, da  $U \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \Rightarrow \underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=1} \cdot \vec{v}_0 = U^{-1} \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_0 = U^{-1} \cdot \vec{v}_1$ :

$$U^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Taschenrechner}} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix} = \vec{v}_0$$