



Mathematik-Abitur in Nordrhein-Westfalen

# Zusammenfassung für das allgemeinbildende Gymnasium - Grundkurs

Jakob Schmid

Wirtschaftsmathematiker

Youtube-Channel: Fit im Mathe-Abi

Jakob Schmid Consulting

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analysis</b>	<b>4</b>
1.1	Ableitung	4
1.1.1	Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von $x$	4
1.1.2	Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel	4
1.1.3	Ableitung der $e$ -Funktion	5
1.1.4	Spezialfälle	5
1.1.5	Produktregel	5
1.1.6	Kettenregel	6
1.2	Integration (Aufleitung)	6
1.2.1	Aufleitung einer Zahl/Konstanten	7
1.2.2	Aufleitung von Potenzfunktionen ( $x, \frac{1}{x^2}, \sqrt{x}, x^2$ , usw.) und trigonometrischen Funktionen ( $\sin(x), \cos(x)$ )	7
1.2.3	Aufleitung der $e$ -Funktion und von verketteten Funktionen	7
1.2.4	Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft	8
1.3	Integral	9
1.3.1	Integral berechnen	10
1.3.2	Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen	10
1.3.3	Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen	11
1.3.4	Integral aus einem Schaubild berechnen	12
1.4	Quadratische Gleichung lösen	13
1.4.1	pq-Formel	13
1.4.2	Mitternachtsformel (abc-Formel)	14
1.5	Lösen von Gleichungen durch Substitution	15
1.6	Satz vom Nullprodukt	16
1.7	Nullstellen	17
1.8	Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt)	18
1.9	Wendestellen, -punkte	21
1.9.1	Wendepunkt	21
1.10	NEW-Regel	22
1.11	Zusammenhänge der Graphen von $F, f, f'$ und $f''$	23
1.11.1	Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen $f, f'$ und $f''$	24
1.12	Monotonieverhalten einer Funktion	25
1.13	Krümmungsverhalten einer Funktion	26
1.14	Tangente	27
1.15	Ganzrationale Funktionen	28
1.15.1	Steckbriefaufgabe, Funktionsgleichung bestimmen	28
1.16	Symmetrie	30
1.17	Definitionsbereich	31
1.18	Grenzwert/Limes einer Funktion	32
1.19	Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus)	34
1.19.1	Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften	35
1.20	Funktion zeichnen oder skizzieren	36

1.21	ln-Regeln . . . . .	37
1.22	Potenzregeln . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Geometrie</b>	<b>38</b>
2.1	LGS - Lineares Gleichungssystem . . . . .	38
2.1.1	Additionsverfahren . . . . .	38
2.1.2	Gauß-Verfahren . . . . .	40
2.2	3D-Koordinatensystem . . . . .	42
2.3	Vektoren . . . . .	43
2.3.1	Rechnen mit Vektoren . . . . .	44
2.3.2	Lineare Abhängigkeit . . . . .	45
2.3.3	Länge eines Vektors . . . . .	45
2.3.4	Skalarprodukt . . . . .	46
2.3.5	Kreuzprodukt . . . . .	46
2.4	Gerade . . . . .	47
2.4.1	Geometrische Punktprobe bei Geraden . . . . .	48
2.4.2	Lage von 2 Geraden . . . . .	49
2.5	Mittelpunkt einer Strecke . . . . .	52
2.6	Ebene . . . . .	53
2.6.1	Parameterform . . . . .	53
2.6.2	Koordinatenform . . . . .	54
2.6.3	Lage von 2 Ebenen . . . . .	55
2.7	Lage von Gerade und Ebene . . . . .	57
2.8	Winkel . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Stochastik</b>	<b>61</b>
3.1	Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	61
3.2	Baumdiagramm . . . . .	64
3.3	Gegenwahrscheinlichkeit . . . . .	66
3.4	Erwartungswert . . . . .	67
3.5	Fakultät $n!$ . . . . .	69
3.6	Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient . . . . .	69
3.6.1	Kumulierte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	71
3.6.2	Erwartungswert . . . . .	73
3.6.3	Standardabweichung . . . . .	73
3.7	Lagemaße und Streumaße von Stichproben . . . . .	74
3.8	Stochastische Prozesse . . . . .	76
3.8.1	Übergangendiagramm/-graph . . . . .	76
3.8.2	Matrixmultiplikation, Matrix-Vektor-Produkt, Potenzieren von Ma- trizen . . . . .	77
3.8.3	Stochastische Übergangsmatrix, Zustandsvektor und Folgevertei- lung, Vorherige Verteilung/Rückwärts-Rechnen . . . . .	79

# 1 Analysis

## 1.1 Ableitung

### 1.1.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von $x$

Die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  ist Null.

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

**Beispiel.**  $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$   
 $f(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$

Die Ableitung von  $x$  ist Eins.

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

**Beispiel.**  $f(x) = x + 6 \Rightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$   
 $f(x) = -x - 3 \Rightarrow f'(x) = -1 - 0 = -1$

### 1.1.2 Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel

**Potenzregel:** Beim Ableiten der Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  mit beliebigem Exponenten (Hochzahl)  $n$  von  $x$  schreibe den Exponenten (die Hochzahl) mit einem Mal-Zeichen vor das  $x$ . Ziehe anschließend „1“ von dem Exponenten (der Hochzahl) ab.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

**Beispiel.**  $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$   
 $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}$

**Faktorregel:**  $u(x)$  sei eine beliebige Funktion (z.B.  $u(x) = x$ ,  $u(x) = x^3$ ,  $u(x) = \sin(x)$  oder  $u(x) = e^x$  usw.). Steht vor  $u(x)$  ein konstanter Faktor (irgendeine Zahl)  $c$ , so bleibt dieses  $c$  beim Ableiten unverändert erhalten, während  $u(x)$  normal abgeleitet wird.

$$f(x) = c \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

**Beispiel.**  $f(x) = -2 \cdot x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot (-3 \cdot x^{-3-1}) = 6x^{-4}$   
 $f(x) = 5 \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$

**Summen- und Differenzregel:**  $u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen. Steht ein + oder ein - zwischen  $u(x)$  und  $v(x)$ , so werden beim Ableiten die Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  jeweils für sich abgeleitet und die Ableitungen anschließend wieder addiert, bzw. subtrahiert.

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x) \text{ und } f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

**Beispiel.**  $f(x) = 2x + 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 + 8x$   
 $f(x) = x - 7 \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - 7 \cdot (-\sin(x)) = 1 + 7 \sin(x)$

### 1.1.3 Ableitung der $e$ -Funktion

$u(x)$  sei eine beliebige Funktion. Die Ableitung der  $e$ -Funktion:  $f(x) = e^{u(x)}$  funktioniert so, dass zunächst der ganze Term  $e^{u(x)}$  so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend mit der Ableitung von  $u(x)$  multipliziert wird.

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x \\ f(x) = e^{-3x} &\Rightarrow f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x} \\ f(x) = 4e^{x^2+1} &\Rightarrow f'(x) = 4e^{x^2+1} \cdot (2x + 0) = 8xe^{x^2+1} \end{aligned}$$

### 1.1.4 Spezialfälle

Ist die abzuleitende Funktion ein Bruch, stellt man sie mit folgender Regel erstmal um:  $f(x) = \frac{1}{x^n} = 1 \cdot x^{-n}$ . Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} &\Rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\ f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} &\Rightarrow f'(x) = -3 \cdot 2x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

Ist die abzuleitende Funktion eine Wurzelfunktion, stellt man diese erstmal nach folgender Regel um:  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ . Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f(x) = 3\sqrt[3]{x} = 3x^{\frac{1}{3}} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (**sin(x)**, **cos(x)**) sind:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung der **ln-Funktion** (Logarithmus zur Basis  $e$ ):  $f(x) = \ln(x)$  ist:

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

### 1.1.5 Produktregel

**Produktregel:**  $u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen. Steht ein Mal-Zeichen zwischen  $u(x)$  und  $v(x)$ , so wird beim Ableiten zunächst  $u(x)$  abgeleitet und mit  $v(x)$  multipliziert und dazu addiert wird  $u(x)$  multipliziert mit der Ableitung von  $v(x)$ .

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} f(x) = 3x \cdot \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot (-\sin(x)) \\ f(x) = x^4 \cdot e^{2x} &\Rightarrow f'(x) = 4x^3 \cdot e^{2x} + x^4 \cdot 2e^{2x} = x^3e^{2x}(4 + 2x) \end{aligned}$$

### 1.1.6 Kettenregel

**Kettenregel:** Sind zwei beliebige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  miteinander verkettet:  $u(v(x))$  (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Ableiten zunächst die „äußere“ Funktion  $u(\cdot)$  abgeleitet und anschließend mit der Ableitung der „inneren“ Funktion  $v(x)$  multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

**Beispiel.** 1. Art der äußeren Funktion  $u(\cdot)$  als  $(v(x))^n$  mit Hochzahl/Exponent  $n$ :

$$f(x) = (4x^2 + 3)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot (4x^2 + 3)^{3-1} \cdot (2 \cdot 4x^{2-1} + 0) = 3(4x^2 + 3)^2 \cdot 8x = 24(4x^2 + 3)^2 x$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot 5(x-9)^{-2-1} \cdot (1-0) = -10(x-9)^{-3}$$

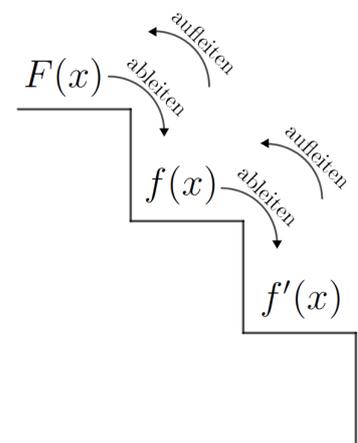
**Beispiel.** 2. Art der äußeren Funktion  $u(\cdot)$  als  $\sin(v(x))$  oder  $\cos(v(x))$ :

$$f(x) = \sin(x^3 + 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x^3 + 1) \cdot (3x^{3-1} + 0) = 3 \cos(x^3 + 1)x^2$$

$$f(x) = 2 \cos(x^4) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2(-\sin(x^4)) \cdot 4x^{4-1} = 8(-\sin(x^4))x^3$$

## 1.2 Integration (Aufleitung)

Das Ab- und Aufleiten von Funktionen kann man mit Treppenstegen vergleichen. Die Funktion  $f(x)$ , die es ab- bzw. aufzuleiten gilt, ist die Treppenstufe auf der wir „momentan“ stehen. Leiten wir diese Funktion  $f(x)$  nun einmal ab, erhalten wir die Ableitung  $f'(x)$ . Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe hinabgestiegen. Wollen wir nun wieder eine Stufe zurück nach oben auf die „Treppenstufe“ von  $f(x)$  steigen, müssen wir  $f'(x)$  aufleiten. Leiten wir also  $f'(x)$  einmal auf, erhalten wir wieder die Funktion  $f(x)$  und befinden uns wieder auf der ursprünglichen Treppenstufe von  $f(x)$ . Leiten wir die Funktion  $f(x)$  ein weiteres Mal auf, erhalten wir die Aufleitung  $F(x)$ . Man nennt  $F(x)$  die Stammfunktion von  $f(x)$ . Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe nach oben gestiegen. Leiten wir nun die Stammfunktion  $F(x)$  einmal ab, erhalten wir wieder die Funktion  $f(x)$  und bewegen uns auf unserer Treppe wieder eine Stufe nach unten.



**Merke:** Wenn ihr eine Funktion  $f(x)$  aufleitet, könnt ihr jedes Mal danach

**kontrollieren**, ob eure Ableitung  $F(x)$  korrekt ist, indem ihr diese Ableitung  $F(x)$  wieder ableitet. Denn es muss dabei wieder die ursprüngliche Funktion  $f(x)$  herauskommen (Denkt an die Treppe!), ansonsten ist eure Ableitung **nicht korrekt!**

### 1.2.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten

Die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  ist die Zahl/Konstante  $C$  multipliziert mit  $x$ .

$$f(x) = C \Rightarrow F(x) = C \cdot x$$

**Beispiel.**  $f(x) = 1 \Rightarrow F(x) = 1 \cdot x = x$       **Kontrolle:**  $F'(x) = 1 \checkmark$   
 $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$       **Kontrolle:**  $F'(x) = 5 \checkmark$

### 1.2.2 Ableitung von Potenzfunktionen ( $x, \frac{1}{x^2}, \sqrt{x}, x^2$ , usw.) und trigonometrischen Funktionen ( $\sin(x), \cos(x)$ )

Beim Ableiten von Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  mit beliebigem Exponenten (Hochzahl)  $n$  von  $x$  addiere als Erstes den Exponenten (die Hochzahl)  $n$  mit „+1“. Als Zweites wird der Term  $x^{n+1}$  multipliziert mit: 1 geteilt durch  $n + 1$  (als Bruch geschrieben).

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

**Beispiel.**  $f(x) = x = x^1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2$   
 $f(x) = 4x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{4}{2+1} \cdot x^{2+1} = \frac{4}{3}x^3$   
 $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3} \Rightarrow F(x) = \frac{6}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = \frac{6}{-2}x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$   
 $f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{3}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x^3}$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (**sin(x), cos(x)**) sind:

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$       **Kontrolle:**  $F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x) \checkmark$   
 $f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$       **Kontrolle:**  $F'(x) = \cos(x) \checkmark$

### 1.2.3 Ableitung der e-Funktion und von verketteten Funktionen

$u(x)$  sei eine beliebige lineare Funktion. Die Ableitung der e-Funktion:  $f(x) = e^{u(x)}$  funktioniert so, dass zunächst der ganze Term  $e^{u(x)}$  so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend multipliziert wird mit: 1 geteilt durch die Ableitung von  $u(x)$ .

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow F(x) = e^{u(x)} \cdot \frac{1}{u'(x)}$$

**Beispiel.**  $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x \cdot \frac{1}{1} = e^x$

$$f(x) = e^{-3x} \Rightarrow F(x) = e^{-3x} \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Sind zwei beliebige Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  miteinander verkettet:  $u(v(x))$  (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Aufleiten zunächst die „äußere“ Funktion  $u(\ )$  aufgeleitet (zu  $U(x)$ ) und anschließend mit: 1 geteilt durch die Ableitung der „inneren“ Funktion  $v(x)$  multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow F(x) = U(v(x)) \cdot \frac{1}{v'(x)}$$

**Beispiel.** 1. Art der äußeren Funktion  $u(\ )$  als  $(v(x))^n$  mit Hochzahl/Exponent  $n$ :

$$f(x) = (2x + 1)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3+1} \cdot (2x + 1)^{3+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x + 1)^4 = \frac{1}{8}(2x + 1)^4$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{-2+1} \cdot (x-9)^{-2+1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{-1} \cdot (x-9)^{-1} = \frac{-5}{(x-9)}$$

**Beispiel.** 2. Art der äußeren Funktion  $u(\ )$  als  $\sin(v(x))$  oder  $\cos(v(x))$ :

$$f(x) = \sin(3x + 1) \Rightarrow F(x) = -\cos(3x + 1) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cos(3x + 1)$$

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow F(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot 2 = 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

#### 1.2.4 Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft

Leitet man eine Funktion  $f(x)$  auf, so erhält man die sogenannte **Stammfunktion**  $F(x)$  von  $f(x)$ . Das Besondere ist, dass jede Funktion  $f(x)$  unendlich viele Stammfunktionen besitzt, aber nur eine Ableitung hat.

Denken wir noch einmal an unsere Treppe: Beim Aufleiten einer Funktion  $f(x)$  haben wir immer die Möglichkeit zu kontrollieren, ob unsere Aufleitung  $F(x)$  korrekt ist, indem wir  $F(x)$  ableiten und dann schauen, ob dasselbe wie  $f(x)$  rauskommt. Da die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten  $C$  Null ist, können wir an die Aufleitung  $F(x)$  ein beliebiges  $C$  dazuaddieren und erhalten beim Ableiten wieder  $f(x)$ , egal welche Zahl wir für  $C$  einsetzen.

$$F(x) + C \Rightarrow \text{Ableiten ergibt: } F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x) \checkmark$$

**Beispiel.** Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^2$  mit der „allgemeinen“ Aufleitung  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  und setzen für  $C$  verschiedene Zahlen ein und leiten ab, um zu schauen ob wir wieder  $f(x) = x^2$  erhalten:

$$C = 7 : F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7 \Rightarrow F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

$$C = -3: F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \Rightarrow F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

Ist nun die Aufgabenstellung, dass eine Funktion  $f(x)$  gegeben ist und man diejenige Stammfunktion  $F(x)$  bestimmen soll, die durch einen **bestimmten** Punkt (z.B.  $F(3) = 8 \Rightarrow P(3|8)$ ) verläuft. Dann geht es genau darum dieses  $C$  so zu bestimmen, dass  $F(x)$  durch diesen Punkt verläuft.

**Beispiel.** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$ . Bestimme diejenige Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$  mit  $F(1) = 4$ :

1. Bestimme allgemeine Aufleitung: zunächst vereinfache  $f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3} = 8(2x-1)^{-3}$

$$\Rightarrow F(x) = 8 \cdot \frac{1}{-3+1} \cdot (2x-1)^{-3+1} \cdot \frac{1}{2} + C = 8 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{2} (2x-1)^{-2} + C = \frac{-2}{(2x-1)^2} + C$$

2. Bestimme  $C$  so, dass  $F(1) = 4$  ist:

$$F(1) = \frac{-2}{(2 \cdot 1 - 1)^2} + C = \frac{-2}{(1)^2} + C = -2 + C \Rightarrow F(1) = 4 \Rightarrow -2 + C = 4 \Rightarrow C = 6$$

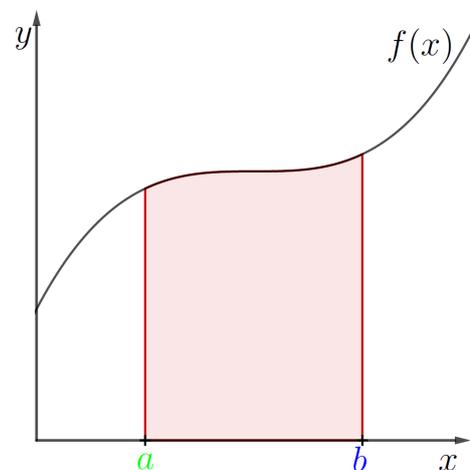
3. Schreibe die Stammfunktion  $F(x)$  mit  $C = 6$  hin:

Die gesuchte Stammfunktion lautet:  $F(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} + 6$ .

### 1.3 Integral

Das **Integral** einer Funktion  $f(x)$  beschreibt „häufig“ den Flächeninhalt der **Fläche** zwischen der Funktion  $f(x)$  und der  $x$ -Achse, mit  $a$  als sogenannte „untere“ Grenze und  $b$  als „obere“ Grenze **auf der  $x$ -Achse**. Die Schreibweise für das **Integral** einer Funktion  $f(x)$  mit der unteren Grenze  $a$  und der oberen Grenze  $b$  ist wie folgt:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Verläuft die **Fläche**, die das **Integral** beschreibt, unterhalb der  $x$ -Achse, so nimmt das **Integral** einen **negativen** Wert an. Verläuft sie oberhalb der  $x$ -Achse, nimmt das **Integral** einen **positiven** Wert an.

Sind die untere Grenze  $a$  und die obere Grenze  $b$  nun so gesetzt, dass bei unserem **Integral** ein Teil der **Fläche** unterhalb und ein Teil oberhalb der  $x$ -Achse verläuft, so wird die „negative“ Fläche von der „positiven“ Fläche abgezogen und das Ergebnis ist das gesamte **Integral** von  $a$  bis  $b$ .

### 1.3.1 Integral berechnen

Das Integral einer Funktion  $f(x)$  wird folgendermaßen berechnet. Zunächst leitet man die Funktion  $f(x)$  auf und erhält  $F(x)$ . In dieses  $F(x)$  setzt man einmal die obere Grenze  $b$  für  $x$  ein **Minus** die untere Grenze  $a$  eingesetzt in  $F(x)$ . Rechnerische Schreibweise ist:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

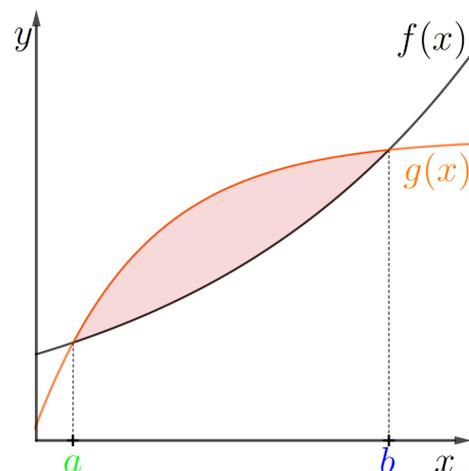
**Beispiel.** Bestimme das Integral  $\int_{-2}^4 x^2 - 2 dx$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 x^2 - 2 dx &= \left[ \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 2x \right]_{-2}^4 = \left[ \frac{1}{3} x^3 - 2x \right]_{-2}^4 = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - \left( \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 64 - 8 - \left( \frac{1}{3} \cdot (-8) - (-4) \right) = \frac{64}{3} - 8 - \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{64}{3} - 8 - \left( -\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 4 = \frac{72}{3} - 12 = 24 - 12 = 12 \end{aligned}$$

### 1.3.2 Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen

Eine Aufgabenstellung ist, die **Fläche**, welche von den beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird, zu berechnen. Die Integralrechnung liefert uns die Lösung. Wenn wir nämlich das Integral von  $g(x)$  mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze **Minus** das Integral von  $f(x)$  auch mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze rechnen, erhalten wir exakt die gesuchte **Fläche**:

$$\text{Fläche} = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) - f(x) dx$$



Um die Integrale berechnen zu können, müssen zuerst die untere und obere Grenze ( $a$  und  $b$ ) berechnet werden. Diese erhält man, durch die Berechnung der **Schnittpunkte** von  $f(x)$  und  $g(x)$ , indem man  $f(x)$  mit  $g(x)$  gleichsetzt und nach  $x$  auflöst.

**Beispiel.** : Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen  $f(x) = 6x$  und  $g(x) = 3x^2$  eingeschlossen wird.

1. Berechne die Schnittpunkte zwischen  $f(x)$  und  $g(x)$ : setze  $f(x) = g(x)$

$$6x = 3x^2 \quad | : x \quad \Rightarrow \text{erster Schnittpunkt bei } x_1 = 0$$

$$6 = 3x \quad | : 3$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow \text{zweiter Schnittpunkt bei } x_2 = 2$$

2. Berechne die Fläche mit Hilfe der beiden Integrale von  $f(x)$  und  $g(x)$  mit 0 als untere und 2 als obere Grenze:

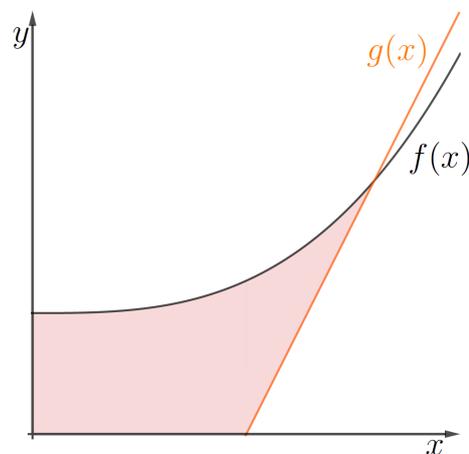
$$\int_0^2 6x \, dx - \int_0^2 3x^2 \, dx = \int_0^2 6x - 3x^2 \, dx = \left[ 6 \cdot \frac{1}{1+1} x^{1+1} - 3 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} \right]_0^2 = \left[ \frac{6}{2} x^2 - \frac{3}{3} x^3 \right]_0^2$$

$$= \left[ 3x^2 - x^3 \right]_0^2 = 3 \cdot 2^2 - 2^3 - (3 \cdot 0^2 - 0^3) = 3 \cdot 4 - 8 - (0 - 0) = 12 - 8 = 4$$

**Hinweis:** Man hätte auch  $f(x)$  mit  $g(x)$  vertauschen können (Also das Integral von  $g(x)$  Minus das Integral von  $f(x)$  rechnen können), dann wäre nicht 4 sondern  $-4$  bei der Rechnung oben herausgekommen. Da eine Fläche allerdings nicht negativ sein kann nutzt man die Betragsstriche  $||$  um die Lösung dann „positiv“ zu machen, also:  $|-4| = 4$ .

### 1.3.3 Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen

Eine Aufgabenstellung ist, die **Fläche**, welche von mehreren Graphen eingeschlossen wird, zu berechnen. Im Beispiel rechts ist es die **Fläche**, die von der  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse und den beiden Funktionen  $f(x)$  sowie  $g(x)$  eingeschlossen wird.

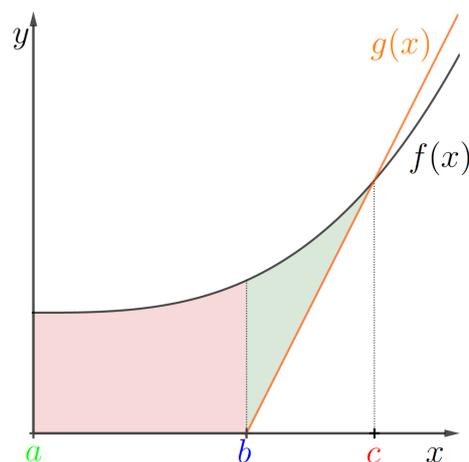


Um diese Fläche zu berechnen, muss man sie in zwei Teile zerlegen, nämlich in die rote Fläche und die grüne Fläche (siehe untere Abbildung). Diese beiden Flächen lassen sich wiederum mit der Integralrechnung berechnen, denn die rote Fläche ist das Integral von  $f(x)$  mit  $a$  als untere und  $b$  als obere Grenze. Die grüne Fläche wiederum ist die Fläche, die im Bereich von  $b$  bis  $c$  durch die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  eingeschlossen wird:

Gesuchte eingeschlossene Fläche = **Fläche** + **Fläche**

$$= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) - g(x) \, dx$$

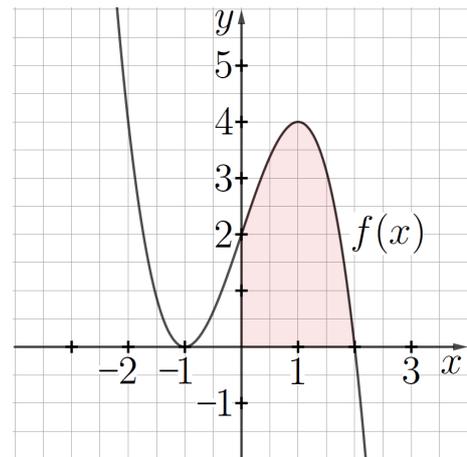
Um diese Integrale berechnen zu können, müssen noch die jeweiligen Integralgrenzen  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmt werden.  $a = 0$  da die  $y$ -Achse die „linke“ Seite der Fläche begrenzt,  $b$  berechnet sich durch den Schnittpunkt von  $g(x)$  mit der  $x$ -Achse und  $c$  wird mit dem Schnittpunkt von  $f(x)$  mit  $g(x)$  berechnet.



**Fazit:** Unterteile die gesuchte Fläche geschickt, so dass man mit geeigneten Integralgrenzen die gesuchte Fläche berechnen kann.

### 1.3.4 Integral aus einem Schaubild berechnen

Ist die Aufgabe das **Integral** einer Funktion aus einem Schaubild abzulesen, so bestimmt man den Inhalt der **Fläche**, die das **Integral** beschreibt, durch händisches Kästchenzählen. Hat man die Anzahl der Kästchen erfasst, die auf der gesuchten **Fläche** vorhanden sind, so muss man die Skalierung der Achsen betrachten und damit den Flächeninhalt eines Kästchens bestimmen (Länge MAL Breite). Anschließend multipliziert man die Anzahl der Kästchen mit dem Flächeninhalt eines Kästchens und hat damit das gesuchte **Integral** bestimmt.



**Beispiel.** : Bestimme aus dem oberen Schaubild das **Integral**  $I = \int_0^2 f(x) dx$

Es handelt sich bei dem **Integral** um die rot markierte **Fläche**. Kästchenzählen ergibt, dass die **Fläche** ca. 24 Kästchen beinhaltet. Auf der  $x$ -Achse hat ein Kästchen die Einheit/Länge 0,5 und auf der  $y$ -Achse dieselbe. Somit beträgt der Flächeninhalt von einem Kästchen: Länge MAL Breite =  $0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = \frac{1}{4}$ . Somit ist die gesamte **Fläche**, also das **Integral**:

$$I = \int_0^2 f(x) dx = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

Eine weitere mögliche Aufgabenstellung mit diesem oberen Schaubild ist, folgenden Term, bestehend aus der Stammfunktion  $F(x)$  von der im Schaubild gegebenen Funktion  $f(x)$ , zu bestimmen:

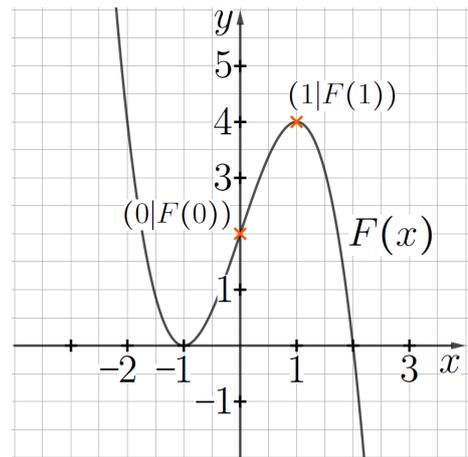
$$F(2) - F(0)?$$

Die Lösung führt über die Überlegung, dass dieser Term ja das Integral von  $f(x)$  mit 0 als untere und 2 als obere Grenze ist. Und die Lösung für dieses Integral bestimmen wir nach demselben „Kästchenzähl-Schema“ wie in der oberen Aufgabenstellung:

$$\int_0^2 f(x) dx = \left[ F(x) \right]_0^2 = F(2) - F(0) = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

**Hinweis:** Wichtig ist also darauf zu achten, nach welcher Funktion in der Aufgabenstellung gefragt ist (z.B. Stammfunktion  $F(x)$ , „normale“ Funktion  $f(x)$  oder Ableitung  $f'(x)$ ) und welche Funktion im Schaubild tatsächlich gegeben ist.

Ist im Schaubild die Stammfunktion  $F(x)$  der Funktion  $f(x)$  gegeben und das Integral  $I = \int_0^1 f(x) dx$  der Funktion  $f(x)$  ist gesucht, so liest man aus dem Schaubild von  $F(x)$  bei der unteren und oberen Grenze des Integrals (in dem Fall  $x = 0$  und  $x = 1$ ) die **y-Werte** ab (also  $F(0) = 2$  und  $F(1) = 4$ ) und berechnet das gesuchte Integral:



$$I = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 4 - 2 = 2$$

## 1.4 Quadratische Gleichung lösen

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die als höchsten Exponenten (Hochzahl) die 2 besitzt. Deshalb heißt sie „quadratisch“. Es gibt zwei Möglichkeiten für eine quadratische Gleichung. 1. Möglichkeit ist, dass  $x$  nur die 2 als Exponenten (Hochzahl) besitzt.  $a$  und  $b$  seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 = b$$

**Beispiel.**  $3x^2 = 12 \quad | :3$   
 $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\quad}$   
 $x = \pm 2 \quad \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

2. Möglichkeit ist, dass in der quadratischen Gleichung  $x$  mit dem Exponenten (Hochzahl) 2 (also  $x^2$ ) vertreten ist und ein einfaches  $x$  (mit dem Exponenten (Hochzahl) 1).  $a$ ,  $b$  und  $c$  seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es folgen nun zwei Verfahren, mit denen man diese Gleichung nach  $x$  auflösen kann. Die pq-Formel und die Mitternachtsformel (abc-Formel).

### 1.4.1 pq-Formel

Um die **pq**-Formel anwenden zu können, muss man zunächst die quadratische Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  durch  $a$  teilen um die „**pq-Form**“ zu erhalten:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 & \quad | : a \\ \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} & \quad \Rightarrow \frac{b}{a} = p \text{ und } \frac{c}{a} = q \\ x^2 + px + q = 0 & \end{aligned}$$

Haben wir die Gleichung nun in die „pq-Form“ gebracht und somit  $p$  und  $q$  herausgefunden, müssen wir nun noch  $p$  und  $q$  in die pq-Formel einsetzen und die Lösung(en) von  $x$  berechnen:

$$\text{Lösung: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir erhalten also maximal 2 Lösungen für  $x$ . Die Lösung  $x_1$  erhalten wir, indem wir nach dem Bruch  $-\frac{p}{2} + \dots$  rechnen und die Lösung  $x_2$  erhalten wir, indem wir nach dem Bruch  $-\frac{p}{2} - \dots$  rechnen. Nur eine Lösung für  $x$  existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{0}$ . Dann ist die einzige Lösung der Term  $-\frac{p}{2}$ . Gar keine Lösung für  $x$  erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

**Beispiel.**  $2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad | :2$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{2}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{3}{2} = p \text{ und } -1 = q$$

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } x_{1,2} &= -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - (-1)} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} \\ &= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \mathbf{x_1} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbf{x_2} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2 \end{aligned}$$

### 1.4.2 Mitternachtsformel (abc-Formel)

Um die Mitternachtsformel anwenden zu können, braucht man die quadratische Gleichung in der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nun müssen wir noch  $a$ ,  $b$  und  $c$  in die Mitternachtsformel (abc-Formel) einsetzen und die Lösung(en) von  $x$  berechnen:

$$\text{Lösung: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In der Regel erhalten wir also 2 Lösungen für  $x$ . Die Lösung  $x_1$  erhalten wir, indem wir im Zähler nach  $-b + \dots$  rechnen und die Lösung  $x_2$  erhalten wir, indem wir im Zähler nach  $-b - \dots$  rechnen. Nur eine Lösung für  $x$  existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt  $\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ . Dann ist die einzige Lösung der Term  $\frac{-b}{2a}$ . Gar keine Lösung für  $x$  erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

**Beispiel.**  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} = -2 \quad | \cdot x^2$

$$\frac{3x^2}{x} - \frac{2x^2}{x^2} = -2x^2 \quad | +2x^2$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

**Lösung:**  $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$   
 $\Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  und  $x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

## 1.5 Lösen von Gleichungen durch Substitution

$a$ ,  $b$  und  $c$  seien beliebige Zahlen. Substituieren bedeutet soviel wie etwas ersetzen, austauschen. Bei bestimmten Gleichungen (z.B.  $ae^{2x} + be^x + c = 0$ ) geht es genau darum, einen Term (hier:  $e^x$ ) zunächst durch einen anderen Term (z.B.  $u$ ) zu ersetzen/substituieren, womit die Gleichung für uns lösbar wird (man schreibt: Substitution:  $e^x = u$ ). In der Regel geht es immer darum, die Gleichung durch die Substitution in eine quadratische Form zu bringen ( $au^2 + bu + c = 0$ ), damit die pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel) angewendet werden kann. Nachdem die quadratische Gleichung nach dem neuen Term ( $u$ ) gelöst ist, werden nun die Lösungen für  $u$  in die Substitutionsgleichung  $e^x = u$  eingesetzt und nach  $x$  aufgelöst (Man nennt dies Resubstitution/Rücksubstitution).

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $-e^{2x} + 5e^x - 4 = 0$ .

1. Substitution:  $e^x = u$

2.  $u$  für  $e^x$  in die Gleichung einsetzen:  $-u^2 + 5u - 4 = 0$

3. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

**Lösung:**  $u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$   
 $\Rightarrow u_1 = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$  und  $u_2 = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

4. Resubstitution:  $e^x = u_1$  und  $e^x = u_2$ , also  $e^x = 1$  und  $e^x = 4$

$$\begin{array}{ll} e^x = 1 & | \ln() \\ \ln(e^x) = \ln(1) & \\ x_1 = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} e^x = 4 & | \ln() \\ \ln(e^x) = \ln(4) & \\ x_2 = \ln(4) & \end{array}$$

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $\frac{2}{x^2} + x^2 = 3$ .

1.  $x$  aus dem Bruch bekommen und anschließend die Gleichung geeignet umstellen:

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{x^2} + x^2 = 3 & | \cdot x^2 \\ \frac{2 \cdot x^2}{x^2} + x^2 \cdot x^2 = 3x^2 & | -3x^2 \\ x^4 - 3x^2 + 2 = 0 & \end{array}$$

2. Substitution:  $x^2 = u$

3.  $u$  für  $x^2$  in die Gleichung einsetzen:  $u^2 - 3u + 2 = 0$

4. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

**Lösung:**  $u_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$   
 $\Rightarrow u_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$  und  $u_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

5. Resubstitution:  $x^2 = u_1$  und  $x^2 = u_2$ , also  $x^2 = 2$  und  $x^2 = 1$

$$\begin{array}{l|l} x^2 = 2 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x = \pm\sqrt{2} & \\ \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2 = 1 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x = \pm\sqrt{1} & \\ \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 & \end{array}$$

## 1.6 Satz vom Nullprodukt

$u(x)$  und  $v(x)$  seien beliebige Funktionen (z.B.  $u(x) = x$ ,  $v(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  oder  $u(x) = x^2 - 1$ ,  $v(x) = 2 - e^x$  usw.). Der Satz vom Nullprodukt besagt: Das Produkt zweier Funktionen (Terme) ist 0 (also  $u(x) \cdot v(x) = 0$ ), wenn **mindestens** eine der beiden Funktionen (Terme) 0 ist ( $u(x) = 0$  und/oder  $v(x) = 0$ ). Logisch, denn 0 MAL irgendetwas, z.B. 0 MAL irgendeinen beliebigen Term (Funktion), oder auch 0 MAL eine beliebige Zahl, ergibt immer 0.

Ist die Aufgabenstellung eine Gleichung der Form  $u(x) \cdot v(x) = 0$  zu lösen, betrachtet man also jede Funktion (Term) für sich und setzt diese gleich 0 ( $u(x) = 0$  und  $v(x) = 0$ ). Jeweiliges Auflösen nach der Variablen  $x$  liefert nach dem Satz vom Nullprodukt die gesuchten Lösungen der Gleichung  $u(x) \cdot v(x) = 0$ .

$$\underbrace{u(x)}_{=0} \cdot \underbrace{v(x)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0 \text{ und } v(x) = 0 \text{ berechnen}$$

**Beispiel.** Lösen Sie die Gleichung  $(x^2 - 3) \cdot (2 - e^x - \frac{1}{e^x}) = 0$ .

1. Setze linke und rechte Seite vom Produkt gleich 0:  $\underbrace{(x^2 - 3)}_{=0} \cdot \underbrace{(2 - e^x - \frac{1}{e^x})}_{=0} = 0$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3 = 0 & | +3 \\ x^2 = 3 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ x = \pm\sqrt{3} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2 - e^x - \frac{1}{e^x} = 0 & | \cdot e^x \\ 2e^x - e^{2x} - \frac{e^x}{e^x} = 0 & \\ -e^{2x} + 2e^x - 1 = 0 & \end{array}$$

2.  $\Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$  und  $x_2 = -\sqrt{3}$ . Bei 2. Gleichung Substitution:  $e^x = u$

3.  $u$  für  $e^x$  in die Gleichung  $(-e^{2x} + 2e^x - 1 = 0)$  einsetzen:  $-u^2 + 2u - 1 = 0$

4. Gleichung nach  $u$  mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

$$\text{Lösung: } u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\Rightarrow u_1 = 1$$

5. Resubstitution:  $e^x = u_1$ , also  $e^x = 1$

$$e^x = 1 \quad | \ln(\quad)$$

$$\ln(e^x) = \ln 1$$

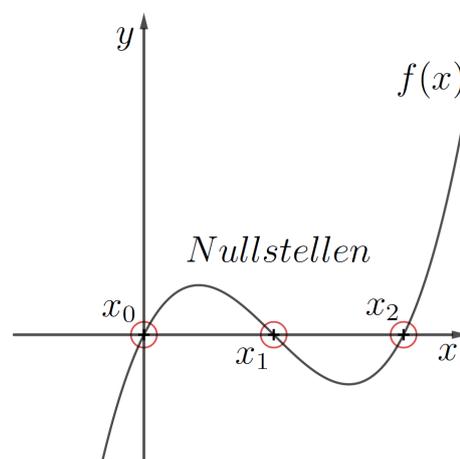
$$x \cdot \ln(e) = 0$$

$$x \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

## 1.7 Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen die Funktion  $f(x)$  die  $x$ -Achse schneidet oder berührt. Sie lassen sich berechnen, indem die Funktion  $f(x)$  gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Diese Lösungen für  $x$  sind die Nullstellen der Funktion  $f(x)$ .

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Die Lösungen } x_0, x_1, x_2, \dots \\ \text{sind die Nullstellen von } f(x)$$



**Beispiel.** Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ .

1. Setze  $f(x) = 0 : x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. Löse die Gleichung nach  $x$  auf:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad | \quad x \text{ ausklammern}$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad | : x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad (\text{Satz vom Nullprodukt} \Rightarrow 1. \text{ Nullstelle von } f(x))$$

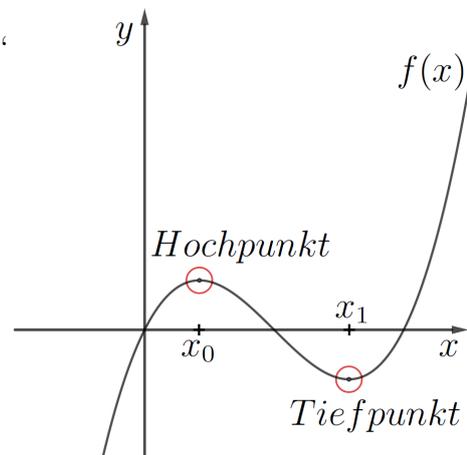
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)}$$

$$\text{Lösung: } x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (2. \text{ und } 3. \text{ Nullstelle von } f(x))$$

## 1.8 Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt)

Die Extremstellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen die Funktion  $f(x)$  weder „steigt“ noch „fällt“, d.h. die Steigung beträgt an diesen Stellen **Null**. Da die **Ableitung** einer Funktion ( $f'(x)$ ) die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ), lassen sich diese Extremstellen berechnen, indem die Ableitung der Funktion (also  $f'(x)$ ) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Diese Lösungen für  $x$  sind die Extremstellen der Funktion  $f(x)$ .



$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{Die Lösungen } x_0, x_1, x_2, \dots \\ \text{sind die Extremstellen von } f(x)$$

Die Extremstellen geben entweder einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt an.

**Hochpunkt:** Das charakteristische für einen Hochpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann „fällt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt genau dann ein Hochpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  eine **negative** Zahl ergibt.

$$\text{Wenn } f''(x_0) < 0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ hat an der Extremstelle } x_0 \text{ einen Hochpunkt}$$

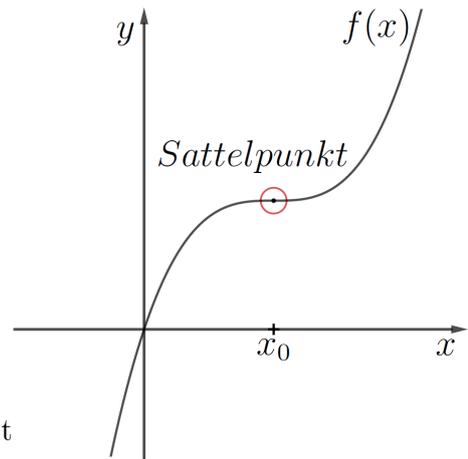
**Tiefpunkt:** Das charakteristische für einen Tiefpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann „ansteigt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt genau dann ein Tiefpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  eine **positive** Zahl ergibt.

$$\text{Wenn } f''(x_0) > 0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ hat an der Extremstelle } x_0 \text{ einen Tiefpunkt}$$

**Hinweis:** Ist die Aufgabenstellung die Extrempunkte einer Funktion  $f(x)$  zu berechnen (Gesucht ist der zugehörige  $x$ - und  $y$ -Wert der Extremstelle:  $E(x|y)$ ), so müssen neben den Extremstellen  $(x_0, x_1, \dots)$  auch die zugehörigen Extremwerte  $(y_0, y_1, \dots)$  bestimmt werden. Diese erhält man, indem man die Extremstellen  $(x_0, x_1, \dots)$  in die Funktion  $f(x)$  einsetzt, also:  $(f(x_0), f(x_1), \dots) = (y_0, y_1, \dots)$ .

$$\text{Extrempunkt (Extremstelle|Extremwert)} = E(x_0|f(x_0)) = E(x_0|y_0)$$

**Sattelpunkt:** Das charakteristische für einen Sattelpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  entweder vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann weiter „ansteigt“ oder vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann weiter „fällt“. An einer (durch  $f'(x) = 0$  berechneten) Extremstelle  $x_0$  liegt ein Sattelpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von  $f(x)$  Null ergibt und die Extremstelle eingesetzt in die 3. Ableitung ungleich Null ergibt:



Wenn  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  hat an der Extremstelle  $x_0$  einen Sattelpunkt

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ .

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ :

$$f'(x) = \frac{3}{3}x^{3-1} - \frac{3 \cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$f''(x) = 2x^{2-1} - 3 = 2x - 3$$

$$f'''(x) = 2 - 0 = 2$$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen: Also  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \text{pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ und } \mathbf{x_2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ (1. und 2. Extremstelle von } f(x))$$

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt (von } f(x) \text{ an der Extremstelle } x_0 = 2)$$

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt (von } f(x) \text{ an der Extremstelle } x_1 = 1)$$

4. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $f(x)$  einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow f(x)$  hat den Tiefpunkt T  $\left(2 \mid \frac{2}{3}\right)$ .

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{2-9+12}{6} = \frac{5}{6}$$

$\Rightarrow f(x)$  hat den Hochpunkt H  $\left(1 \mid \frac{5}{6}\right)$ .

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion  $g(x) = (x-1)^3 + 1$ .

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $g(x) = (x-1)^3 + 1$ :

$$g'(x) = 3(x-1)^{3-1} \cdot 1 = 3(x-1)^2$$

$$g''(x) = 6(x-1)^{2-1} \cdot 1 = 6(x-1) = 6x - 6$$

$$g'''(x) = 6 - 0 = 6$$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen: Also  $g'(x) = 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 3(x-1)^2 &= 0 & | :3 \end{aligned}$$

$$\frac{3(x-1)^2}{3} = \frac{0}{3}$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x-1 = \pm\sqrt{0} \quad | +1$$

$$\Rightarrow \mathbf{x_0 = 1} \quad (1. \text{ Extremstelle von } g(x))$$

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$$g''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \text{eventuell liegt ein Sattelpunkt vor}$$

4. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Sattelpunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 1. Ableitung argumentieren, welcher Extrempunkt vorliegt  $\Rightarrow$  siehe Monotonieverhalten einer Funktion)

$$g'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt (von } g(x) \text{ an der Extremstelle } x_0 = 1)$$

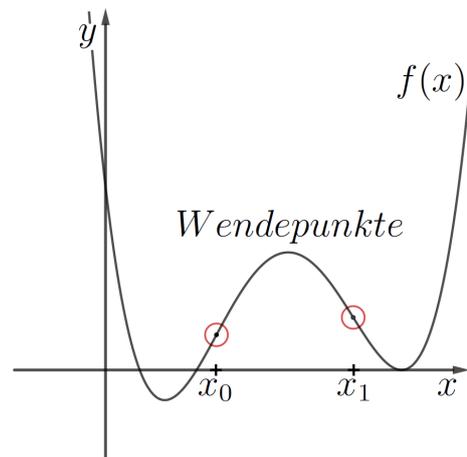
5. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $g(x)$  einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$$g(1) = (1-1)^3 + 1 = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$\Rightarrow g(x)$  hat den Sattelpunkt S  $\left(1 \mid 1\right)$ .

## 1.9 Wendestellen, -punkte

Die Wendestellen einer Funktion  $f(x)$  sind genau die  $x$ -Werte, an denen der Funktionsgraph von  $f(x)$  sein Krümmungsverhalten ändert. D.h. der Graph von  $f(x)$  wechselt von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt von einer Rechts- in eine Linkskurve. Diese Wendestellen lassen sich berechnen, indem die 2. Ableitung der Funktion (also  $f''(x)$ ) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst wird. Wenn diese Lösungen für  $x$  eingesetzt in die 3. Ableitung der Funktion (also  $f'''(x)$ ) ungleich Null ergeben, so sind sie die Wendestellen der Funktion  $f(x)$ .



$f''(x) = 0 \Rightarrow$  Wenn für die Lösungen  $x_0, x_1, x_2, \dots$  gilt:  $f'''(x_{0,1,2,\dots}) \neq 0$   
so sind sie Wendestellen von  $f(x)$

### 1.9.1 Wendepunkt

Ein Punkt auf dem Graphen von  $f(x)$ , bei dem diese „Wende“ (von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt) stattfindet, ist ein Wendepunkt von  $f(x)$ . Der Wendepunkt wird beschrieben durch seinen  $x$ -Wert und  $y$ -Wert:  $W(x_0|y_0)$ . Der  $x$ -Wert ist die Wendestelle  $x_0$  (Berechnung siehe oben). Den  $y$ -Wert erhält man, indem man die Wendestelle  $x_0$  in die Funktion  $f(x)$  einsetzt, also  $f(x_0) = y_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Wendepunkt (Wendestelle|y-wert)} \\ = W(x_0|f(x_0)) = W(x_0|y_0) \end{aligned}$$

**Beispiel.** Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x.$$

1. Berechne die 1., 2. und die 3. Ableitung der Funktion  $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x$ :

$$f'(x) = -\frac{3}{6}x^{3-1} + 2x^{2-1} - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$f''(x) = -\frac{1 \cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = -x + 2$$

$$f'''(x) = -1 + 0 = -1$$

2. Die 2. Ableitung gleich Null setzen und nach  $x$  auflösen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -x + 2 &= 0 \quad | +x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

3. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Wendepunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 2. Ableitung argumentieren, ob ein Wendepunkt vorliegt  $\Rightarrow$  siehe Krümmungsverhalten einer Funktion)

$$f'''(2) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendepunkt (von } f(x) \text{ an der Wendestelle } x_0 = 2)$$

4. Die Wendestelle in die zugehörige ursprüngliche Funktion  $f(x)$  einsetzen, den  $y$ -Wert berechnen und schließlich den Wendepunkt aufschreiben:

$$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{8}{6} + 4 - 6 = -\frac{4}{3} + \frac{12}{3} - \frac{18}{3} = \frac{-4 + 12 - 18}{3} = \frac{-10}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ hat den Wendepunkt } W \left( 2 \mid -\frac{10}{3} \right).$$

## 1.10 NEW-Regel

Die NEW-Regel ist eine Hilfestellung, Zusammenhänge zwischen einer Funktion ( $f(x)$ ) und deren Aufleitung ( $F(x)$ ) sowie deren Ableitungen ( $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ) aufzuzeigen. Dabei stehen die einzelnen Buchstaben in dem Wort *NEW* für:

**N** : Nullstelle

**E** : Extremstelle

**W** : Wendestelle

Um die NEW-Regel anzuwenden, schreibt ihr sie folgendermaßen auf:

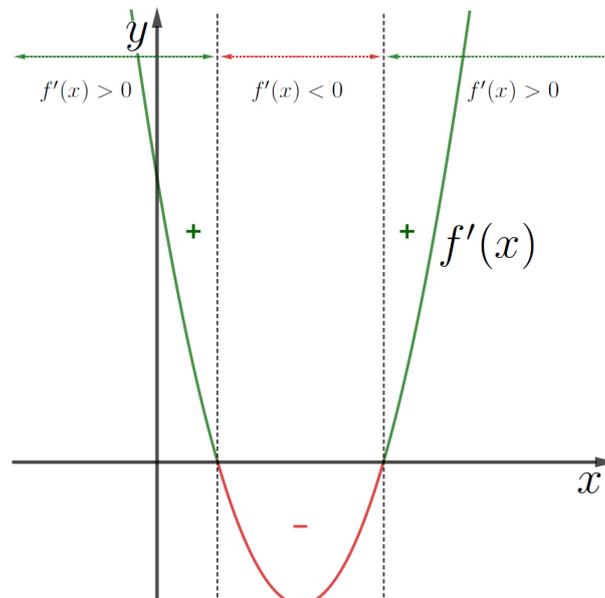
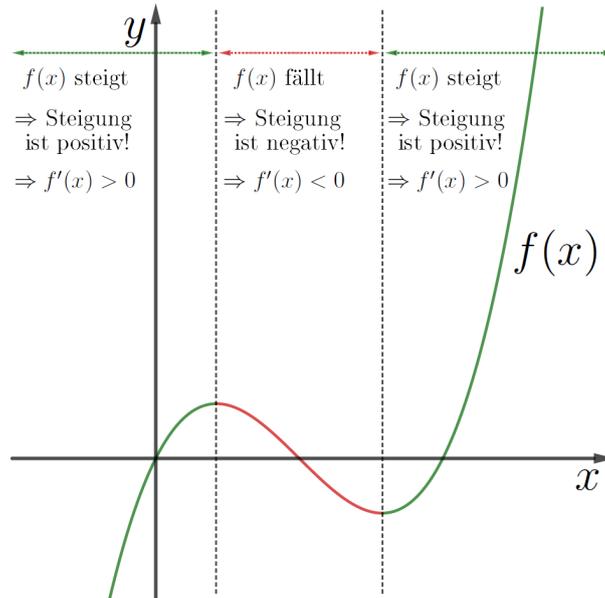
$F(x)$	$N$	$E$	$W$			
$f(x)$		$N$	$E$	$W$		
$f'(x)$			$N$	$E$	$W$	
$f''(x)$				$N$	$E$	$W$

Nun lässt sich **spaltenweise** ablesen, welche Stellen (Null-, Extrem-, oder Wendestelle) in den jeweiligen „Funktionsstadien“ ( $F(x)$ ,  $f(x)$ ,  $f'(x)$  und  $f''(x)$ ) aufeinander folgen. Haben wir beispielsweise in der Funktion  $f(x)$  eine Wendestelle vorliegen, so hat  $f'(x)$  an genau dieser Stelle eine Extremstelle und  $f''(x)$  eine Nullstelle. Weiteres Lesebeispiel: Hat  $f'(x)$  eine Nullstelle, so ist an genau dieser Stelle bei  $f(x)$  eine Extremstelle und bei  $F(x)$  eine Wendestelle.

## 1.11 Zusammenhänge der Graphen von $F$ , $f$ , $f'$ und $f''$

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen einer Funktion  $f(x)$  und deren Ableitung  $f'(x)$ . Die **Ableitung**  $f'(x)$  gibt die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  an ( **$f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$** ). D.h. wenn die Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $x$  ansteigt, so ist die Steigung an dieser Stelle positiv und dementsprechend nimmt  $f'(x)$  an genau dieser Stelle einen positiven Wert an. Fällt die Funktion  $f(x)$  so ist die Steigung an dieser Stelle negativ und  $f'(x)$  nimmt an dieser Stelle einen negativen Wert an.

**Hinweis:** Dieser Zusammenhang gilt auch zwischen  $F(x)$  und deren Ableitung  $f(x)$  sowie  $f'(x)$  und deren Ableitung  $f''(x)$ .

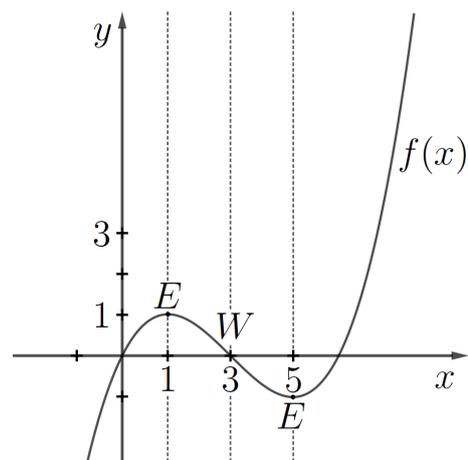


### 1.11.1 Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen $f$ , $f'$ und $f''$

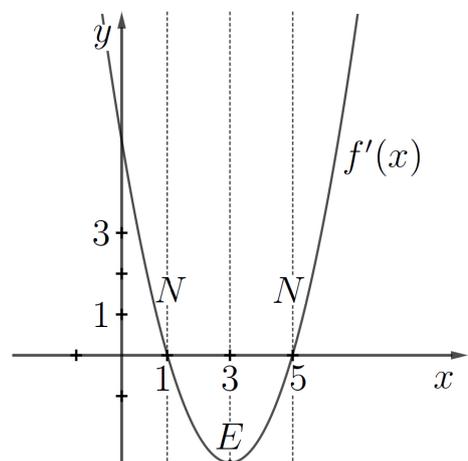
Wir betrachten nun mit Hilfe der NEW-Regel die graphischen Zusammenhänge zwischen  $f(x)$ ,  $f'(x)$  und  $f''(x)$  in den Schaubildern auf der rechten Seite. Die NEW-Regel hierfür lautet:

$f(x)$	$N$	$E$	$W$		
$f'(x)$		$N$	$E$	$W$	
$f''(x)$			$N$	$E$	$W$

Das 1. Schaubild zeigt die Funktion  $f(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_0 = 1$  eine Extremstelle  $E$  (Hochpunkt von  $f(x)$ ), bei  $x_1 = 3$  eine Wendestelle  $W$  (Wendepunkt von  $f(x)$ ) und bei  $x_2 = 5$  eine Extremstelle  $E$  (Tiefpunkt von  $f(x)$ ).

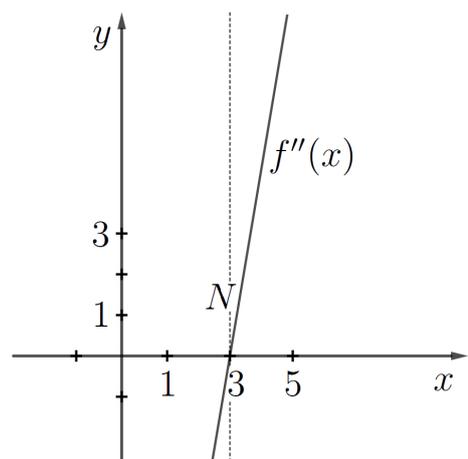


Wenn in der Funktion  $f(x)$  eine Extremstelle  $E$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung  $f'(x)$  an dieser Stelle eine Nullstelle  $N$  und wenn in der Funktion  $f(x)$  eine Wendestelle  $W$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung  $f'(x)$  an dieser Stelle eine Extremstelle  $E$ .



Das 2. Schaubild zeigt die 1. Ableitung  $f'(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_0 = 1$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f'(x)$ ), bei  $x_1 = 3$  eine Extremstelle  $E$  (Tiefpunkt von  $f'(x)$ ) und bei  $x_2 = 5$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f'(x)$ ).

Wenn in der 1. Ableitung  $f'(x)$  eine Extremstelle  $E$  vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 2. Ableitung  $f''(x)$  an dieser Stelle eine Nullstelle  $N$ .



Das 3. Schaubild zeigt die 2. Ableitung  $f''(x)$ . Wir identifizieren hier bei  $x_1 = 3$  eine Nullstelle  $N$  (Nullstelle von  $f''(x)$ ).

**Hinweis:** Diese graphischen Zusammenhänge gelten auch zwischen  $F(x)$ ,  $f(x)$  und  $f'(x)$  (siehe NEW-Regel).

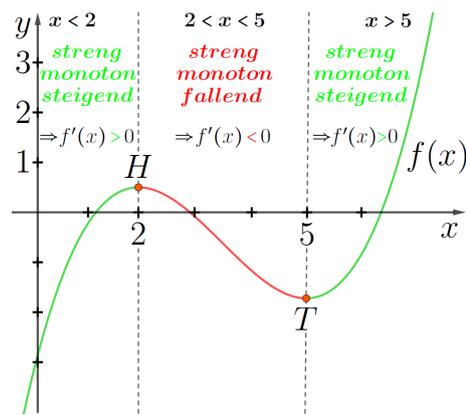
## 1.12 Monotonieverhalten einer Funktion

Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion  $f(x)$  steigt oder fällt. Da die **Ableitung**  $f'(x)$  die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ) gilt für das Monotonieverhalten einer Funktion:

Wenn  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  ist **streng monoton steigend**

Wenn  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  ist **streng monoton fallend**

Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Monotonieverhalten der Funktion  $f(x)$ :



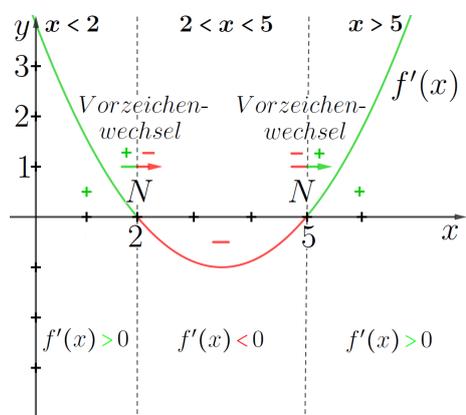
Im Bereich/Intervall  $x < 2$  ist  $f(x)$  **streng monoton steigend**

Im Bereich/Intervall  $2 < x < 5$  ist  $f(x)$  **streng monoton fallend**

Im Bereich/Intervall  $x > 5$  ist  $f(x)$  wieder **streng monoton steigend**

Die Punkte an denen sich das Monotonieverhalten ändert, sind entweder Hoch- oder Tiefpunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Hochpunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  davor ansteigt ( $\Rightarrow f'(x) > 0$ ) und anschließend fällt ( $\Rightarrow f'(x) < 0$ ). Beim Tiefpunkt verhält es sich genau andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Monotonieverhalten von  $f(x)$ , indem man die Extremstellen von  $f(x)$ , also die Nullstellen  $N$  der 1. Ableitung  $f'(x)$  bestimmt und anschließend  $x$ -Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 1. Ableitung  $f'(x)$  einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 1. Ableitung  $f'(x)$  vor (also entweder von  $+$  nach  $-$  oder andersherum), so ist die berechnete Extremstelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Monotonieverhalten von  $f(x)$ . Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ist die berechnete Extremstelle ein Sattelpunkt und das Monotonieverhalten ändert sich nicht.



**Hinweis:** Man kann somit also auch durch Bestimmung des Monotonieverhaltens einer Funktion  $f(x)$  herausfinden, ob an einer Extremstelle ein Hochpunkt, Tiefpunkt oder Sattelpunkt vorliegt:

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  ein VZW von  $+$  nach  $- \Rightarrow$  Hochpunkt in  $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  ein VZW von  $-$  nach  $+$   $\Rightarrow$  Tiefpunkt in  $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle  $N$  in  $f'(x)$  **kein** VZW  $\Rightarrow$  Sattelpunkt in  $f(x)$

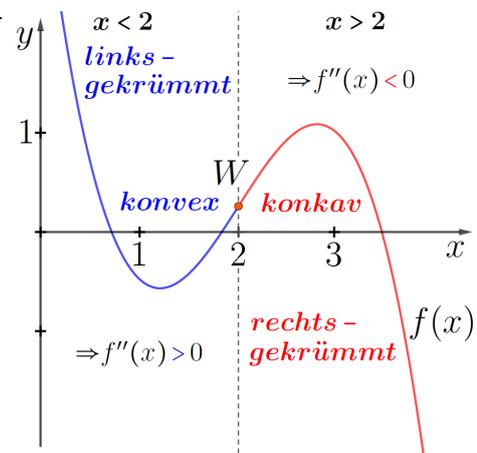
## 1.13 Krümmungsverhalten einer Funktion

Das Krümmungsverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion  $f(x)$  entlang einer Linkskurve, entlang einer Rechtskurve oder einfach nur „gerade“ verläuft. Die 2. Ableitung  $f''(x)$  gibt uns Auskunft über das Krümmungsverhalten einer Funktion:

Wenn  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  ist linksgekrümmt/konvex

Wenn  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  ist rechtsgekrümmt/konkav

Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Krümmungsverhalten der Funktion  $f(x)$ :

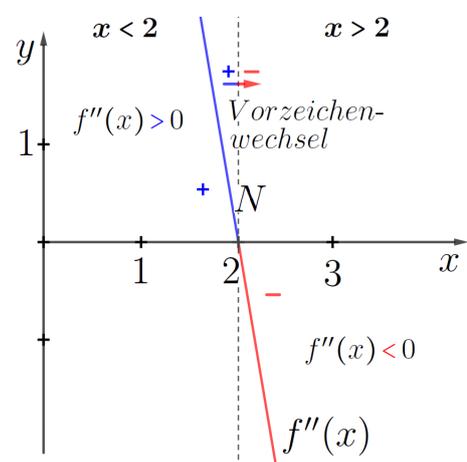


Im Bereich/Intervall  $x < 2$  ist  $f(x)$  linksgekrümmt/konvex

Im Bereich/Intervall  $x > 2$  ist  $f(x)$  rechtsgekrümmt/konkav

Die Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, sind Wendepunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Wendepunkt ist, dass die Funktion  $f(x)$  an diesem Punkt eine „Wende“ vornimmt, entweder von einer Links- in eine Rechtskurve oder andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Krümmungsverhalten von  $f(x)$ , indem man die Wendestellen von  $f(x)$ , also die Nullstellen der 2. Ableitung  $f''(x)$  bestimmt und anschließend  $x$ -Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 2. Ableitung  $f''(x)$  einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 2. Ableitung  $f''(x)$  vor (also entweder von  $+$  nach  $-$  oder andersherum), so ist die berechnete Wendestelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Krümmungsverhalten von  $f(x)$ . Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ändert sich das Krümmungsverhalten von  $f(x)$  nicht.



## 1.14 Tangente

Eine **Tangente**  $t$  ist eine Gerade, die die Funktion  $f(x)$  an einem Punkt berührt (dem sogenannten **Berührungspunkt**  $B(x_b|y_b)$ ). Berühren bedeutet, dass die Steigung der **Tangente**  $t$  die Gleiche ist, wie die Steigung der Funktion  $f(x)$  am **Berührungspunkt**  $B$ . D.h.  $t$  und  $f(x)$  schneiden sich NICHT im Punkt  $B$ , sondern berühren sich dort.

Da die **Ableitung** einer Funktion ( $f'(x)$ ) die **Steigung** der Funktion  $f(x)$  an jeder Stelle  $x$  angibt ( $f'(x) = \text{Steigung von } f(x)$ ), wird die Steigung von  $f(x)$  am **Berührungspunkt**  $B$  mit Einsetzen des  $x$ -Werts  $x_b$  in die Ableitung  $f'(x)$  berechnet.

$$\begin{aligned} f'(x_b) &= \text{Steigung der Funktion } f(x) \text{ bei } B \\ &= \text{Steigung der Tangente } t \end{aligned}$$

Eine **Tangente**  $t$  wird mit einer Tangentengleichung beschrieben. Die allgemeine Form der Tangentengleichung ist:

$$t: y = m \cdot x + c$$

Dabei ist  $m$  die Steigung der **Tangente**  $t$  und  $c$  ist der Schnittpunkt von  $t$  mit der  $y$ -Achse. Um also die Tangentengleichung einer **Tangente**  $t$  aufzustellen, muss man nur  $m$  und  $c$  herausfinden, in die allgemeine Form der Tangentengleichung einsetzen und erhält die Geradengleichung für die **Tangente**  $t$ . Das Schema zur Bestimmung einer Tangentengleichung ist folgendes:

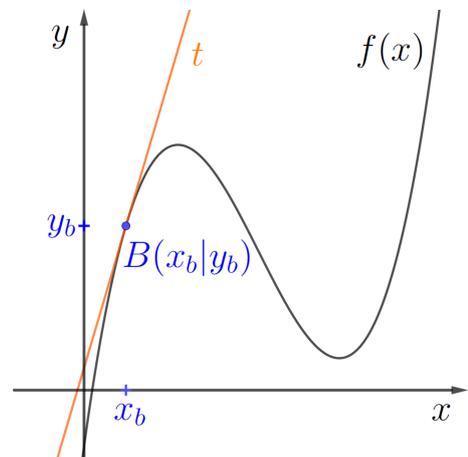
1. Bestimme den  $x$ -Wert und den  $y$ -Wert des **Berührungspunktes**  $B(x_b|y_b)$ .
2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf:  $t: y = m \cdot x + c$
3. Berechne die 1. Ableitung von  $f(x)$ , also  $f'(x)$ .
4. Setze  $x_b$  in  $f'(x)$  ein und erhalte  $m$ :  $f'(x_b) = m$
5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung  $m$  ein, für  $x$  setze  $x_b$  ein und für  $y$  setze  $y_b$  ein. Anschließend löse die Gleichung nach  $c$  auf:

$$y_b = m \cdot x_b + c$$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung  $t$  auf, indem du  $m$  und  $c$  in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt:  $t: y = m \cdot x + c$

**Hinweis:** Ist die Aufgabenstellung eine sogenannte Wendetangente der Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, dann ist damit die Tangente gemeint, die durch den Wendepunkt der Funktion  $f(x)$  verläuft. D.h. der **Berührungspunkt** ist der Wendepunkt von  $f(x)$  (In diesem Fall schneidet die Tangente auch die Funktion  $f(x)$  im Punkt  $B$ ). Also muss man zuerst den  $x$ - und  $y$ -Wert dieses Wendepunktes bestimmen.

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Tangente der Funktion  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$  an der Stelle  $x = 1$ .



1. Bestimme den  $x$ - und  $y$ -Wert des **Berührungspunktes**: Setze  $x_b = 1$  in  $f(x)$  ein  
 $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 4 + 2 = -1 = y_b \Rightarrow$  **Berührungspunkt**  $B(1 | -1)$

2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf:

$$t: y = m \cdot x + c$$

3. Berechne die 1. Ableitung von  $f(x)$ , also  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$$

4. Setze  $x_b = 1$  in  $f'(x)$  ein und erhalte  $m$ :

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 3 - 8 + 2 = -3 = m$$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung  $m = -3$  ein, für  $x$  setze  $x_b = 1$  ein und für  $y$  setze  $y_b = -1$  ein. Nun löse die Gleichung nach  $c$  auf:

$$-1 = -3 \cdot 1 + c \quad | +3$$

$$2 = c$$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung  $t$  auf, indem du  $m = -3$  und  $c = 2$  in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt:

$$t: y = -3x + 2$$

## 1.15 Ganzrationale Funktionen

Bei einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** ist  $n$  der höchste Exponent (Hochzahl) von  $x$ . Seien  $a, b, c, d$  und  $e$  beliebige reelle Zahlen, dann ist zum Beispiel die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **4-ten Grades**:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \Rightarrow 4 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **3-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow 3 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **2-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow 2 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

**Beispiel.**  $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$

$\Rightarrow$  Ganzrationale Funktion 3-ten Grades mit  $a = 3$ ,  $b = 0$ ,  $c = -4$  und  $d = 1$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \Rightarrow$  Ganzrationale Funktion 2-ten Grades mit  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  und  $c = 0$

### 1.15.1 Steckbriefaufgabe, Funktionsgleichung bestimmen

Ist die Aufgabenstellung die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** zu bestimmen unter gewissen Bedingungen (z.B. Hochpunkt an Stelle  $x = 1$ ,

Wendepunkt an Stelle  $x = -3$ , Verlauf durch den Ursprung etc.), so schreibt man zunächst die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  **$n$ -ten Grades** auf und bildet davon die 1. und 2. Ableitung ( $f'(x)$  und  $f''(x)$ ). Nun müssen  **$n + 1$**  Gleichungen, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden  **$n + 1$**  Bedingungen an die Funktion  $f(x)$ , aufgestellt werden. Diese  **$n + 1$**  Gleichungen bilden ein Gleichungssystem, das nach den Variablen  $a, b, c, d, \dots$  aufgelöst wird. Schließlich liefert das Einsetzen der berechneten Variablen in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  $f(x)$   **$n$ -ten Grades** die zu bestimmende Funktionsgleichung.

**Hinweis:** Entnimmt man der Aufgabenstellung, dass die gesuchte ganzrationale Funktion **achsensymmetrisch** ist, so sind direkt alle gesuchten Variablen  $a, b, c, d, \dots$  GLEICH Null, die vor einem  $x$  mit **ungeradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**). Ist die gesuchte ganzrationale Funktion **punktsymmetrisch**, so sind direkt alle gesuchten Variablen  $a, b, c, d, \dots$  GLEICH Null, die vor einem  $x$  mit **geradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**).

**Beispiel.** Der Graph einer ganzrationalen Funktion  $f(x)$  dritten Grades hat den Hochpunkt  $H(0|1)$  und an der Stelle  $x = 1$  die Tangente mit der Gleichung  $t: y = -5x + 3$ . Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von  $f(x)$ .

1. Schreibe die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion  $f(x)$  3-ten Grades auf und bilde die 1. und 2. Ableitung  $f'(x)$  sowie  $f''(x)$ :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

2. Da  $3 + 1 = 4$  Variablen (nämlich  $a, b, c$  und  $d$ ) bestimmt werden müssen, um die Funktionsgleichung aufstellen zu können, stelle nun 4 Gleichungen auf, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden 4 Bedingungen an die Funktion  $f(x)$ :

Die Funktion  $f(x)$  verläuft durch den Punkt  $H(0|1)$ :

$$f(0) = 1$$

$$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1 \quad (1. \text{ Gleichung})$$

Da  $H(0|1)$  ein Hochpunkt ist, hat  $f(x)$  bei  $x = 0$  eine Extremstelle, deshalb gilt:

$$f'(0) = 0$$

$$3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0 \quad (2. \text{ Gleichung})$$

Da  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$  die Tangente  $t$  hat, verläuft die Funktion  $f(x)$  durch den Berührungspunkt  $B(1|-2)$  ( $-2 = y_b$  deshalb, da  $x_b = 1$  eingesetzt in die Tangente

$t: -5 \cdot 1 + 3 = -2$  ist):

$$f(1) = -2$$

$$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -2 \quad \xrightarrow{d=1 \text{ und } c=0} \quad \begin{array}{l} a + b + 0 + 1 = -2 \\ a + b = -3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -1 \\ (3. \text{ Gleichung}) \end{array} \right.$$

Da  $f(x)$  an der Stelle  $x = 1$  die Tangente  $t$  hat, hat  $f(x)$  an dieser Stelle die gleiche Steigung wie  $t$  ( $m_t = -5$ ), deshalb gilt:

$$f'(1) = -5$$

$$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -5 \xrightarrow{c=0} 3a + 2b + 0 = -5$$

$$3a + 2b = -5 \quad (4. \text{ Gleichung})$$

3. Löse das Gleichungssystem. Es gilt nur noch  $a$  und  $b$  mithilfe der 3. und 4. Gleichung herauszufinden. Löse 3. Gleichung nach  $a$  auf und setze dieses  $a$  in die 4. Gleichung ein:

$$(3. \text{ Gleichung}) \quad a + b = -3 \quad | -b$$

$$a = -3 - b$$

$$(4. \text{ Gleichung}) \quad 3a + 2b = -5 \quad | a = -3 - b \text{ einsetzen}$$

$$3(-3 - b) + 2b = -5$$

$$-9 - 3b + 2b = -5 \quad | +9$$

$$-b = 4 \quad | \cdot(-1)$$

$$b = -4$$

$$(3. \text{ Gleichung}) \quad a + b = -3 \quad | b = -4 \text{ einsetzen}$$

$$a - 4 = -3 \quad | +4$$

$$a = 1$$

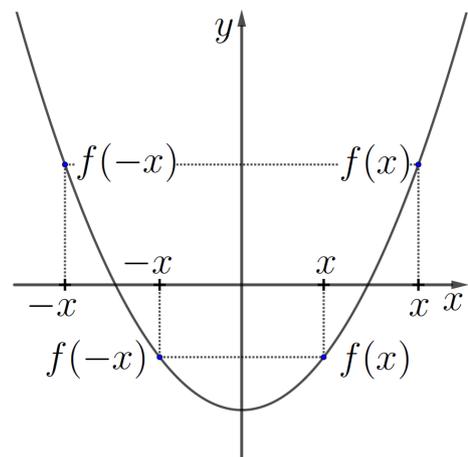
4. Einsetzen der berechneten Variablen  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = 0$  und  $d = 1$  in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion dritten Grades liefert die Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

## 1.16 Symmetrie

Bei symmetrischen Funktionen unterscheidet man in Achsensymmetrie (bezüglich der  $y$ -Achse) und Punktsymmetrie (bezüglich dem Ursprung  $(0|0)$ ). Eine Funktion  $f(x)$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, wenn sie spiegelsymmetrisch zur  $y$ -Achse angeordnet ist. D.h. setzt man einen beliebigen **positiven**  $x$ -Wert in die Funktion  $f(x)$  ein, kommt derselbe Funktionswert  $f(x)$  ( $y$ -Wert) heraus, wie wenn man den „gegensätzlichen“ **negativen**  $x$ -Wert in die Funktion  $f(x)$  einsetzt. Also ist eine Funktion  $f(x)$  achsensymmetrisch, wenn für jeden  $x$ -Wert folgendes gilt:

$$f(-x) = f(x)$$



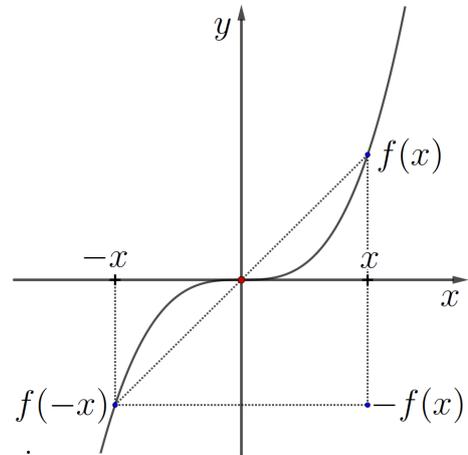
**Beispiel.**  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$  ist achsensymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 - 1 = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$$

Eine Funktion  $f(x)$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung  $(0|0)$ , wenn für jeden  $x$ -Wert folgendes gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Das heißt man kann jeden Punkt auf der Funktion  $f(x)$  am Ursprung spiegeln und „landet“ in gleichem Abstand wieder auf der Funktion  $f(x)$ .



**Beispiel.**  $f(x) = x^3 + x$  ist punktsymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$$

**Hinweis:** Bei ganzrationalen Funktionen lässt sich sehr einfach eine Symmetrie erkennen. Eine Achsensymmetrie liegt dann vor, wenn  $f(x)$  **nur gerade** Exponenten (Hochzahlen) bei  $x$  besitzt! Eine Punktsymmetrie liegt dann vor, wenn  $f(x)$  **nur ungerade** Exponenten (Hochzahlen) bei  $x$  besitzt!

## 1.17 Definitionsbereich

Der Definitionsbereich  $D_f$  einer Funktion  $f(x)$  beschreibt alle  $x$ -Werte, die man in die Funktion  $f(x)$  einsetzen „darf“. In der Regel sind Funktionen über die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  definiert. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  umfassen alle Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , also  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[ = -\infty < x < +\infty$ . Einzelne Zahlen, die nicht in die Funktion eingesetzt werden dürfen, bezeichnet man als Definitionslücken. Schreibweise für den Definitionsbereich  $D_f$  einer Funktion  $f(x)$  ist:

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$  Alle reellen Zahlen dürfen für  $x$  eingesetzt werden

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \Rightarrow$  Alle reellen Zahlen bis auf  $x_1, x_2$  dürfen für  $x$  eingesetzt werden  
 $\Rightarrow x_1, x_2$  sind Definitionslücken

$D_f = \mathbb{R}^+ \Rightarrow$  Alle positiven reellen Zahlen größer 0 dürfen für  $x$  eingesetzt werden

$D_f = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow$  Alle positiven reellen Zahlen und die 0 dürfen für  $x$  eingesetzt werden

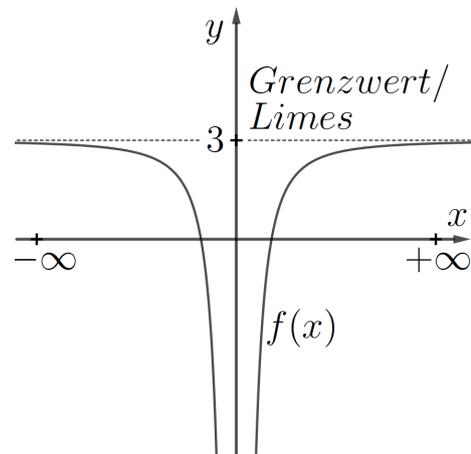
**Beispiel.** Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktionen

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 7, \quad g(x) = \frac{3}{x-1}, \quad h(x) = \ln(x) \quad \text{und} \quad i(x) = \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^2 + 3x - 7 && \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\
 g(x) &= \frac{3}{x-1} && \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\
 h(x) &= \ln(x) && \Rightarrow D_h = \mathbb{R}^+ \\
 i(x) &= \sqrt{x} && \Rightarrow D_i = \mathbb{R}_0^+
 \end{aligned}$$

## 1.18 Grenzwert/Limes einer Funktion

Der Grenzwert oder auch Limes einer Funktion  $f(x)$  beschreibt das Grenzverhalten dieser Funktion. Die „Grenzen“ sind dabei  $+\infty$  und  $-\infty$  auf der  $x$ -Achse. Die Frage des Grenzwerts/Limes einer Funktion  $f(x)$  ist also: Was passiert mit der Funktion  $f(x)$ , wenn einmal  $x$  gegen  $+\infty$  und einmal  $x$  gegen  $-\infty$  geht, gegen welchen Wert strebt  $f(x)$  an diesen „Grenzen“? Die Schreibweise ist folgende:



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{ (für } x \text{ gegen } +\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...)} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \text{ (für } x \text{ gegen } -\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...)}
 \end{aligned}$$

Beispielsweise strebt im rechten Schaubild die Funktion  $f(x)$  sowohl für die „Grenze“  $x = +\infty$ , als auch für  $x = -\infty$  gegen den Grenzwert/Limes 3. Also in diesem Fall  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ .

Für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion  $f(x)$  setzen wir einmal für  $x = +\infty$  ein sowie einmal  $x = -\infty$  ein und schauen dann, was bei der Funktion rauskommt. Wichtig ist es ein Verständnis dafür zu bekommen, was dieses „Einsetzen von  $\infty$  für  $x$ “ mit verschiedenen Termen macht. Die wichtigste Erkenntnis ist, dass  $\frac{1}{\infty} = 0$  ist, also  $\frac{1}{\text{Eine riesengroße Zahl (nämlich } \infty)} = 0$ . Anbei einige Beispiele fürs Verständnis:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + 2, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty + 2 = \infty \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty + 2 = -\infty \\
 f(x) &= x^2 - 5, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} (-\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
 f(x) &= \frac{1}{x} + 1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{x+2}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\infty+2} = \frac{3}{\infty} = 0 \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-\infty+2} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\
 f(x) &= e^x, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^\infty = \infty \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 f(x) &= \frac{1}{e^x}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
 & & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-\infty}} = e^\infty = \infty
 \end{aligned}$$

**Hinweis:** Die in den obigen Beispielen benutzte Schreibweise soll nur zum Verständnis dienen und kann in einer Nebenrechnung angewandt werden. Die **korrekte** mathematische Schreibweise für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion ist in den folgenden Beispielen dargestellt. Hierbei zeigen geschweifte Klammern unter den Termen an, was mit dem Term passiert wenn  $x$  gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$  strebt.

**Beispiel.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x+7} - 2 \text{ und } g(x) = 30 + \frac{3}{e^x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\rightarrow 0} - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\rightarrow 0} - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 30 + \underbrace{\frac{3}{e^x}}_{\rightarrow 0} = 30 + 0 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 30 + \frac{3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 30 + 3 \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow \infty} = \infty$$

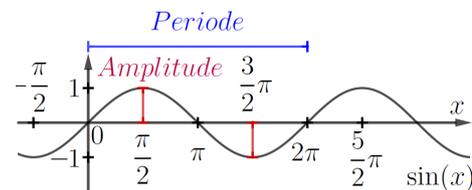
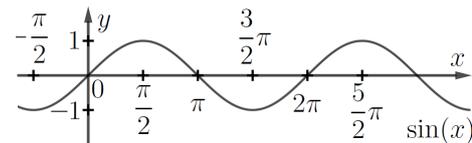
## 1.19 Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus)

Die folgenden trigonometrischen Funktionen, oder auch Winkelfunktionen genannt, werden im Bogenmaß betrachtet. Das Bogenmaß ist wie das Gradmaß ein Winkelmaß und wird in Abhängigkeit von  $\pi$  angegeben:

Winkelmaß	Bogenmaß
0	0
90°	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$
180°	$\pi \approx 3,14$
360°	$2\pi \approx 6,28$

Im rechten Schaubild ist die normale Sinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Sinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:

$x$ -Wert	$y$ -Wert
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
$\pi$	$\sin(\pi) = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$
$2\pi$	$\sin(2\pi) = 0$



Die **Periode** der normalen Sinusfunktion beträgt  $2\pi$ .

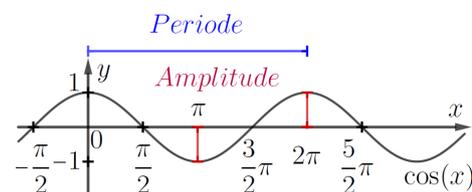
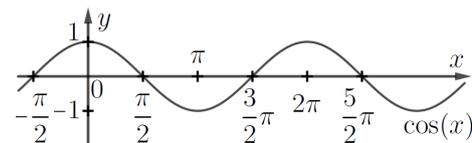
Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle an.

Eine Welle besteht aus einem „Berg“ und einem „Tal“. Die Sinusfunktion startet im Ursprung (also bei 0) durchläuft einen „Berg“ und danach ein „Tal“. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Sinusfunktion periodisch.

Die **Amplitude** der normalen Sinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags“ in  $y$ -Richtung der Sinusfunktion nach oben und unten an.

Im rechten Schaubild ist die normale Cosinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Cosinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:

$x$ -Wert	$y$ -Wert
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\pi$	$\cos(\pi) = -1$
$\frac{3}{2}\pi$	$\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$
$2\pi$	$\cos(2\pi) = 1$



Die **Periode** der normalen Cosinusfunktion beträgt  $2\pi$ . Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle

an. Eine Welle besteht aus einem „Berg“ und einem „Tal“. Die Cosinusfunktion startet bei 1 (beim „Gipfel des Berges“) durchläuft ein „Tal“ und kommt anschließend wieder bei 1 (beim „Gipfel des 2. Berges“) an. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Cosinusfunktion periodisch.

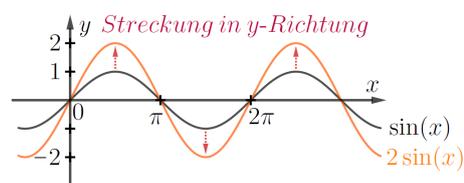
Die **Amplitude** der normalen Cosinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags“ in  $y$ -Richtung der Cosinusfunktion nach oben und unten an.

### 1.19.1 Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften

Die allgemeine Sinusfunktion hat die folgende Funktionsgleichung:

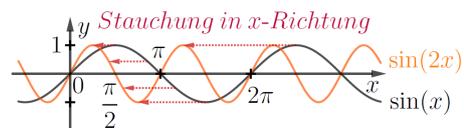
$$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

Das  $a$  gibt die **Amplitude** der Sinusfunktion an und damit die Streckung/Stauchung der Funktion in  $y$ -Richtung. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $2 \sin(x)$   $a = 2$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion  $\sin(x)$  um das 2-fache in  $y$ -Richtung gestreckt. Die Amplitude beträgt somit 2.



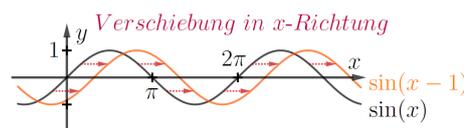
Das  $b$  bestimmt die Periode (Länge einer Welle) und gibt somit die Streckung/Stauchung der Funktion in  $x$ -Richtung an. Formel zur Berechnung der Periode  $P$  ist:

$$P = \frac{2\pi}{b}$$

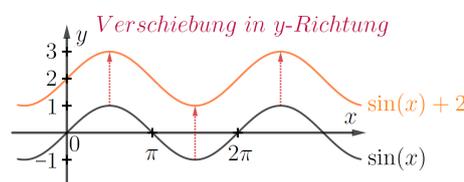


Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(2x)$ ,  $b = 2$ . Die Periode beträgt somit  $\pi$ .

Das  $c$  gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in  $x$ -Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(x - 1)$ ,  $c = 1$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 1 nach rechts verschoben.



Das  $d$  gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in  $y$ -Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion  $\sin(x) + 2$ ,  $d = 2$ . Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 2 nach oben verschoben.

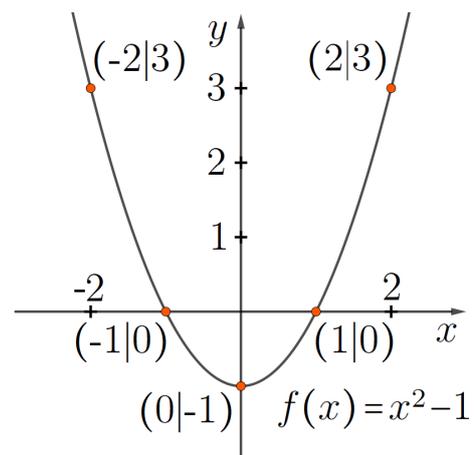


**Hinweis:** Diese Eigenschaften gelten genauso für die allgemeine Cosinusfunktion:  $f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$ .

## 1.20 Funktion zeichnen oder skizzieren

Ist die Aufgabenstellung eine Funktion  $f(x)$  zu zeichnen oder zu skizzieren, ist **höchste zeichnerische Präzision und Aufmerksamkeit** angesagt. Zunächst gilt es sich einen Überblick zu verschaffen, welcher Bereich auf der  $x$ -Achse „darstellerisch relevant“ ist für die Funktion  $f(x)$ . Oft ist in der Aufgabenstellung dafür ein expliziter Definitionsbereich angegeben (z.B.  $-3 \leq x \leq 3$ ) oder ein bestimmter „Zeitraum für  $f(t)$ “ z.B.  $t = 30 \text{ min} \Rightarrow 0 \leq t \leq 30$ ). Wenn kein expliziter Definitionsbereich angegeben ist, so gilt es aus der Aufgabenstellung herauszulesen, welcher Bereich „von Interesse“ ist. Ist in der Aufgabenstellung ausschließlich die Funktion  $f(x)$  gegeben, so spielt sich der Definitionsbereich meist in einem „kleinen Bereich“ ab (z.B.  $-4 \leq x \leq 4$ ).

Sowohl beim Skizzieren als auch beim Zeichnen einer Funktion bietet es sich an die **Wertetabelle** für den „relevanten“ Definitionsbereich einer Funktion  $f(x)$  über den Taschenrechner anzeigen zu lassen (Tabelle der  $x$ - und zugehörigen  $y$ -Werte von  $f(x)$ ). Darf kein Taschenrechner verwendet werden, so fertigt man die Wertetabelle per Hand an und setzt dafür die  $x$ -Werte des „relevanten“ Definitionsbereichs in die Funktion  $f(x)$  ein und berechnet die zugehörigen  $y$ -Werte. Anschließend zeichnet man die Punkte  $(x|y)$  in ein Koordinatensystem ein, dessen Koordinatenachsen an die  $x$ - und  $y$ -Werte in der Wertetabelle angepasst ist. Schließlich verbindet man die Punkte **funktionsgetreu** (d.h. ohne Ecken!) miteinander und erhält den Graphen der Funktion  $f(x)$ .



**Beispiel.** Zeichnen Sie die Funktion  $f(x) = x^2 - 1$  in dem Bereich  $-2 \leq x \leq 2$ :

Wertetabelle:

x-Wert	-2	-1	0	1	2
$f(x) \Rightarrow y$ -Wert	$f(-2) = 3$	$f(-1) = 0$	$f(0) = -1$	$f(1) = 0$	$f(2) = 3$

Einzeichnen der Punkte  $(x|y)$  der Wertetabelle in ein, die Achsen den  $x$ - und  $y$ -Werten angepasstes, Koordinatensystem und anschließendes **funktionsgetreues** verbinden der Punkte liefert das obige Schaubild.

**Hinweis:** Das **Beschriften der Achsen ist wichtig!** Beim Skizzieren einer Funktion muss nicht exakt jeder Punkt eingezeichnet werden. Es geht darum die charakteristischen Eigenschaften (wie Funktionsverlauf, Nullstellen, Extrem- sowie Wendepunkte) grafisch darzustellen.

## 1.21 ln-Regeln

Seien  $a$  und  $b$  beliebige Zahlen/Variablen. Die Rechenregeln für den  $\ln()$  sind folgende:

1.  $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
2.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3.  $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

Außerdem zu merken ist, dass:

$$e^{\ln(a)} = a$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(1) = 0$$

### Beispiel.

$$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln(1) - \ln(5) = 0 - \ln(5) = -\ln(5)$$

$$\ln(x^4) = 4 \ln(x)$$

$$\ln(e^{3x}) = 3x \ln(e) = 3x \cdot 1 = 3x$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$e^{\ln(2)} = 2$$

## 1.22 Potenzregeln

Seien  $a$ ,  $b$  und  $n$  beliebige Zahlen/Variablen. Die Potenzregeln sind:

$$1. \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\text{Beispiel: } x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$$

$$2. \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

$$3. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\text{Beispiel: } 4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3 = 20^3 = 8000$$

$$4. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{Beispiel: } \frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 2^4 = 16$$

$$5. \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$\text{Beispiel: } (x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

$$6. \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$\text{Beispiel: } \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$7. \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Beispiel: } \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$8. \quad \sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$\text{Beispiel: } \sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$$

## 2 Geometrie

### 2.1 LGS - Lineares Gleichungssystem

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, gibt es 3 gängige Verfahren: Das Einsetzungs- (nur bei 2 gesuchten Variablen), das Additions- und das Gaußverfahren.

**Einsetzungsverfahren:** Sind nur 2 Variablen in einem linearen Gleichungssystem zu lösen, bietet das Einsetzungsverfahren eine einfache Möglichkeit. Hierbei wird zunächst eine Gleichung nach einer der beiden gesuchten Variablen aufgelöst und anschließend in die andere Gleichung eingesetzt. Diese Gleichung hat nun nur noch eine Variable und wird nach dieser aufgelöst. Das Ergebnis dieser Variable setzt man wiederum in egal welche Gleichung ein und bestimmt damit das Ergebnis der anderen gesuchten Variable. Beispiel:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 \\ x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

1. Löse die 2. Gleichung nach  $x$  auf (Es bietet sich diese Wahl an, da hier  $x$  bereits „alleine“/ohne Faktor steht. Man kann aber genauso die 1. Gleichung nach  $x$  auflösen):

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 & | -3y \\ x &= 15 - 3y \end{aligned}$$

2. Setze dieses  $x = 15 - 3y$  in die 1. Gleichung ein und löse nach  $y$  auf:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 & | x = 15 - 3y \\ -3(15 - 3y) + 2y &= -1 \\ -45 + 9y + 2y &= -1 & | +45 \\ 11y &= 44 & | : 11 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

3. Setze dieses  $y = 4$  in die 1. oder 2. Gleichung ein und löse nach  $x$  auf:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 & | y = 4 \\ x + 3 \cdot 4 &= 15 \\ x + 12 &= 15 & | -12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

#### 2.1.1 Additionsverfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 Variablen zu lösen, bietet das Additionsverfahren eine Möglichkeit. Hierbei werden zunächst die 3 Gleichungen untereinander nummeriert hingeschrieben (römische Zahlen, normale Zahlen ganz egal). Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad x + y - 5z &= 2 \\ \text{II} \quad -2x + y - 2z &= -4 \\ \text{III} \quad -x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

**1. Schritt:** Ziel ist es, die 3 Gleichungen so miteinander zu addieren, dass eine Variable wegfällt und man danach 2 Gleichungen mit nur noch 2 Variablen erhält. Je nachdem welche Variable man im ersten Schritt eliminieren möchte, muss man dafür als Erstes einzelne Gleichungen mit einem Faktor (einer Zahl) multiplizieren, damit bei Addition der Gleichungen auch tatsächlich diese Variable verschwindet. Im obigen Beispiel bietet es sich an, die Variable  $x$  zu eliminieren, indem man die I + III Gleichung rechnet ( $\Rightarrow$  ergibt Gleichung IV) und danach die I Gleichung mit 2 multipliziert und anschließend mit der II Gleichung addiert (also  $2 \cdot I + II \Rightarrow$  ergibt Gleichung V):

$$\begin{array}{r}
 \text{I} \quad x + y - 5z = 2 \\
 \text{II} \quad -2x + y - 2z = -4 \\
 \text{III} \quad -x + y + z = 2 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 \text{IV: I + III} \quad x + (-x) + y + y - 5z + z = 2 + 2 \\
 \text{IV} \quad 2y - 4z = 4 \\
 \hline
 \text{I} \quad x + y - 5z = 2 \quad | \cdot 2 \\
 2 \cdot \text{I} \quad 2x + 2y - 10z = 4 \\
 \text{II} \quad -2x + y - 2z = -4 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 \text{V: } 2 \cdot \text{I} + \text{II} \quad 2x + (-2x) + 2y + y - 10z + (-2z) = 4 + (-4) \\
 \text{V} \quad 3y - 12z = 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

**2. Schritt:** Nun hat man 2 Gleichungen (IV und V) mit nur noch 2 Variablen ( $y$  und  $z$ ). Ziel ist es, die 2 Gleichungen wieder so miteinander zu addieren, dass eine weitere Variable wegfällt und man danach 1 Gleichung mit nur noch 1 Variable erhält. Damit die Variable  $y$  in den Gleichungen IV und V bei der Addition eliminiert wird, sucht man zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren 2 und 3, welches 6 ist. Somit wird die Gleichung IV mit 3 multipliziert und die Gleichung V mit  $-2$ . **Minus** 2 deshalb, damit bei der Addition der beiden Gleichungen die  $y$ -Variable eliminiert wird:

$$\begin{array}{r}
 \text{IV} \quad 2y - 4z = 4 \quad | \cdot 3 \\
 3 \cdot \text{IV} \quad 6y - 12z = 12 \\
 \text{V} \quad 3y - 12z = 0 \quad | \cdot (-2) \\
 (-2) \cdot \text{V} \quad -6y + 24z = 0 \quad \leftarrow + \\
 \hline
 3 \cdot \text{IV} + (-2) \cdot \text{V} : \quad 6y - 6y - 12z + 24z = 12 + 0 \\
 \quad 12z = 12 \quad | : 12 \\
 \quad z = 1
 \end{array}$$

**3. Schritt:** Nachdem eine Variable gelöst ist (in dem Fall  $z$ ), werden die restlichen Variablen ( $x$  und  $y$ ) durch „rückwärtseinsetzen“ in die vorherigen Gleichungen berechnet. Man kann  $z = 1$  entweder in die Gleichung IV oder V einsetzen und diese anschließend nach  $y$  auflösen. Die Variable  $x$  erhält man, indem  $z = 1$  und das berechnete  $y$  in eine der Gleichungen I, II oder III eingesetzt werden und diese anschließend nach  $x$  aufgelöst wird:

$$\begin{array}{r|l}
 z = 1 \text{ in V: } & 3y - 12z = 0 \quad | \quad z = 1 \\
 & 3y - 12 \cdot 1 = 0 \quad | \quad +12 \\
 & 3y = 12 \quad | \quad :3 \\
 & y = 4 \\
 \hline
 y = 4 \text{ und } z = 1 \text{ in I: } & x + y - 5z = 2 \quad | \quad y = 4 \text{ und } z = 1 \\
 & x + 4 - 5 \cdot 1 = 2 \quad | \quad +1 \\
 & x = 3
 \end{array}$$

**Hinweis:** In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für  $x$ ,  $y$  und  $z$  kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. Keine eindeutige Lösung existiert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Gleichung  $0 = 0$  herauskommt. Gar keine Lösung existiert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Ungleichung herauskommt (z.B.  $0 = 2$ ).

### 2.1.2 Gauß-Verfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 oder mehr Variablen zu lösen, bietet das Gaußsche Eliminationsverfahren eine Möglichkeit. Um das Gaußverfahren zu benutzen, wendet man die sogenannte Matrixschreibweise an und schreibt das Lineare Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Dafür betrachten wir nur die **Koeffizienten** (Zahlen) vor den Variablen im linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & x + y - 5z = 2 \qquad \qquad \qquad 1x + 1y - 5z = 2 \\
 \text{II} & -2x + y - 2z = -4 \quad \Rightarrow \quad -2x + 1y - 2z = -4 \\
 \text{III} & -x + y + z = 2 \qquad \qquad \qquad -1x + 1y + 1z = 2
 \end{array}$$

und übertragen diese in die Matrix. Die Werte der rechten Seite der Gleichungen (hier 2, -4 und 2) werden auch in die Matrix, in die rechte Seite hinter dem Strich, übertragen:

$$\left( \begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & -5 & 2 \\
 -2 & 1 & -2 & -4 \\
 -1 & 1 & 1 & 2
 \end{array} \right)$$

Ziel ist es nun durch umformen und addieren von Zeilen die Matrix in folgende Form zu bekommen, sodass nur noch **1en auf der Diagonalen** stehen und ansonsten **0en**. Die Zahlen, welche dann am Ende (sobald diese Form erreicht wurde) auf der rechten Seite von dem Strich stehen, geben uns dann direkt die Lösungen für die gesuchten Variablen an. Deutlich wird das, indem man die Matrix wieder in Gleichungen umschreibt, z.B.:

$$\left( \begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & 1 & 0 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l}
 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3 \qquad \qquad x = 3 \\
 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 4 \qquad \Rightarrow \qquad y = 4 \\
 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 1 \qquad \qquad \qquad z = 1
 \end{array}$$

Damit nun diese „Ziel“-Form der Matrix erreicht wird, werden nun nacheinander Additionen und Umformungen von Zeilen durchgeführt, in der Reihenfolge, dass **zuerst unterhalb der Diagonalen 0en** entstehen und **danach oberhalb der Diagonalen**. Die Reihenfolge der Stellen in der Matrix, für welche man eine 0 „schafft“, ist im Folgenden mit einem **gelben Hintergrund gekennzeichnet**:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ | \cdot (-3) \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} | : 6 \\ | : 24 \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot 10 \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | : 10 \end{array} \\
 & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} | : 2 \\ | : (-2) \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

**1. Hinweis:** Um immer die „Ziel“-Form der Matrix zu erreichen, wird es in manchen Fällen nötig sein, Zeilen innerhalb der Matrix zu vertauschen. Das ist ohne weiteres möglich! Beispiel:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

**2. Hinweis:** In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für  $x$ ,  $y$  und  $z$  kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem

tem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. **Keine eindeutige Lösung** existiert dann, wenn **in einer Zeile der Matrix** (vor oder nach einem „Rechenschritt“) **nur 0en stehen**. **Gar keine Lösung** existiert dann, wenn **in einer Zeile der Matrix** (vor oder nach einem „Rechenschritt“) **auf der linken Seite des senkrechten Strichs nur 0en stehen und auf der rechten Seite eine beliebige Zahl** (denn dann liegt eine falsche Aussage vor!). Beispiel:

Keine eindeutige Lösung:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Keine Lösung:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{array} \right)$$

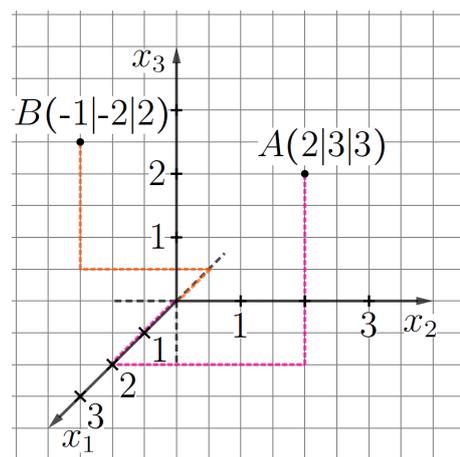
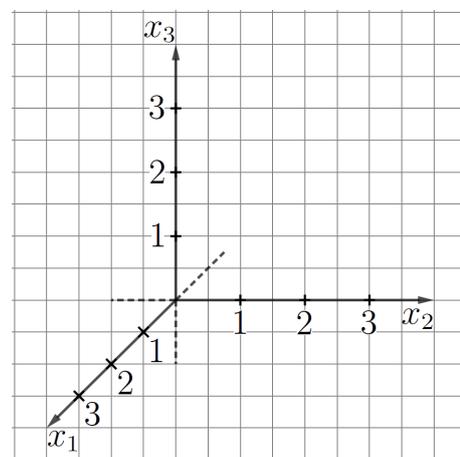
## 2.2 3D-Koordinatensystem

Um einen 3-dimensionalen Raum darstellen zu können, kommt eine 3. Achse im 3D-Koordinatensystem hinzu. Das 3D-Koordinatensystem besteht aus einer  $x_1$ -,  $x_2$ - und einer  $x_3$ -Achse. Im 2D-Koordinatensystem mit einer  $x$ - und  $y$ -Achse kann man sich nur nach oben/unten auf der  $y$ -Achse und seitwärts auf der  $x$ -Achse bewegen. Im 3D-Koordinatensystem kann man sich neben oben/unten auf der  $x_3$ -Achse und seitwärts auf der  $x_2$ -Achse auch in die Tiefe (3e-Dimension) auf der  $x_1$ -Achse bewegen.

Die Schreibweise für Punkte in diesem Koordinatensystem ist:  $P(x_1|x_2|x_3)$ . Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Vektoren **waagrecht** aufgeschrieben.

Wie man Punkte in das 3D-Koordinatensystem einzeichnet, ist am Beispiel von 2 Punkten  $A(2|3|3)$  und  $B(-1|-2|2)$  im rechten Schaubild dargestellt. Die farbigen Linien starten im Ursprung und beschreiben jeweils mithilfe der Punktkoordinaten den Weg, der zum Standort des Punktes im 3D-Koordinatensystem führt.

Beispiel Standortbestimmung Punkt  $A(2|3|3)$ : Man startet im Ursprung geht +2 Einheiten nach vorne auf der  $x_1$ -Achse, geht danach +3 Einheiten nach rechts in Richtung der  $x_2$ -Achse und schließlich +3 Einheiten nach oben in Richtung der  $x_3$ -Achse.



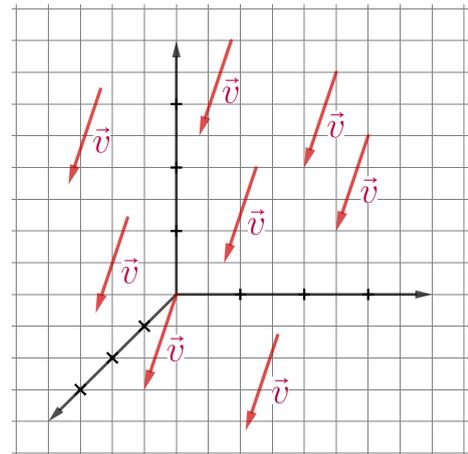
## 2.3 Vektoren

Vektoren im 3-dimensionalen Raum sind „Pfeile“, die eine bestimmte Länge und Richtung haben. Die Schreibweise für Vektoren ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Punkten **senkrecht** aufgeschrieben.

Ein Vektor ist **nur** durch seine Länge und Richtung bestimmt, er ist **nicht** ortsgebunden. Das heißt ein Vektor kann sich überall im Raum befinden. Im rechten Schaubild sind alle dargestellten Vektoren ein und derselbe Vektor  $\vec{v}$ . Sie haben alle dieselbe Länge und Richtung, sie sind nur unterschiedlich im Raum positioniert. Man kann also einen Vektor beliebig im Raum verschieben.

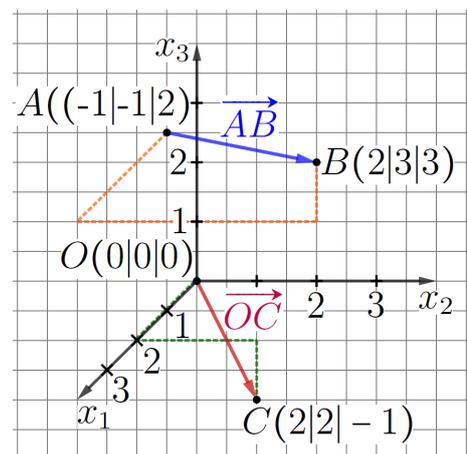


Ein Vektor der durch 2 Punkte  $A$  und  $B$  definiert ist, hat die Schreibweise  $\overrightarrow{AB}$ . Dabei zeigt die Reihenfolge der Buchstaben  $\overrightarrow{AB}$  an, von welchem Punkt zu welchem Punkt der Vektor verläuft (also die Richtung des Vektors). Bei dem Vektor  $\overrightarrow{AB}$  verläuft der Vektor vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$ , der Vektor  $\overrightarrow{BA}$  verläuft andersherum vom Punkt  $B$  zum Punkt  $A$ .

Die Berechnung eines Vektors zwischen 2 Punkten erfolgt, indem die einzelnen Koordinaten des „Endpunkts“ **Minus** die Koordinaten des „Startpunkts“ gerechnet werden. Im Beispiel im rechten Schaubild berechnet sich also der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  zwischen dem „Startpunkt“  $A(-1|-1|2)$  und dem „Endpunkt“  $B(2|3|3)$  folgendermaßen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 3 - (-1) \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die **orangefarbene Linie** startet im Punkt  $A$  und beschreibt mithilfe der **Vektorkoordinaten** von  $\overrightarrow{AB}$  den Weg, der zum Punkt  $B$  mithilfe des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  im 3D-Koordinatensystem führt. Der Vektor  $\overrightarrow{OC}$  ist ein sogenannter **Ortsvektor**.



Ortsvektoren sind Vektoren, deren „Startpunkt“ **immer** der Ursprung  $O(0|0|0)$  ist und der „Endpunkt“ beliebig ist. Im Beispiel ist der „Endpunkt“  $C(2|2|-1)$ . Die Vektorkoordinaten des Ortsvektors sind **immer** die Punktkoordinaten des „Endpunkts“. Siehe Berechnung des Ortsvektors  $\vec{OC}$ :

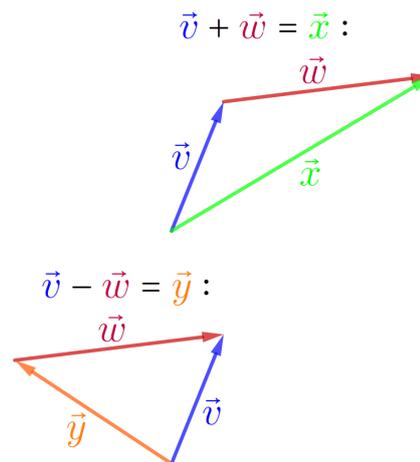
$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} c_1 - o_1 \\ c_2 - o_2 \\ c_3 - o_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 2 - 0 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 2.3.1 Rechnen mit Vektoren

Addiert oder subtrahiert man Vektoren miteinander entsteht ein neuer Vektor. Bei der Addition bzw. Subtraktion werden die einzelnen Vektorkoordinaten miteinander addiert bzw. subtrahiert. Im Beispiel im rechten Schaubild ist die Addition bzw. Subtraktion

der Vektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  mit  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$  und deren Ergebnisvektoren  $\vec{x}$  (bei Addition) bzw.  $\vec{y}$  (bei Subtraktion) graphisch dargestellt.

Bei der Addition „reih“ man die Vektoren der Richtung entsprechend aneinander und erhält den resultierenden Ergebnisvektor. Bei der Subtraktion „reih“ man den abgezogenen Vektor entgegen seiner Richtung an (im Beispiel  $\vec{w}$ ). Die Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:



$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-2) \\ 2 + 6 \\ 5 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 2 - 6 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Multipliziert man einen Vektor mit einem Faktor (eine beliebige Zahl), so werden alle Vektorkoordinaten mit dem Faktor (der beliebigen Zahl) multipliziert. Graphisch gesehen wird der Vektor durch den Faktor verlängert oder verkürzt. Das Multiplizieren mit einem negativen Faktor verändert, neben der Verkürzung oder Verlängerung, die Richtung um  $180^\circ$ , d.h. der Vektor zeigt anschließend in die entgegengesetzte Richtung.

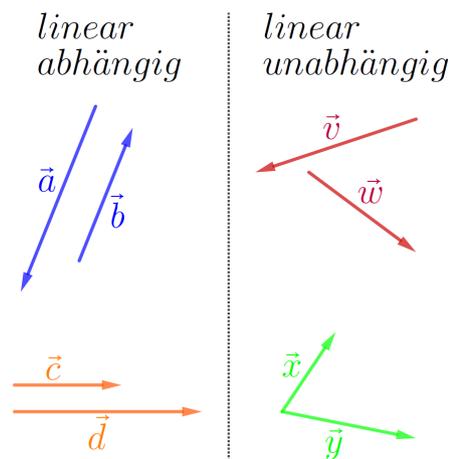
**Beispiel.**

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Lineare Abhängigkeit

2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel verlaufen. Dementsprechend sind 2 Vektoren linear unabhängig, wenn sie **nicht** parallel verlaufen.

Rechnerisch lässt sich die Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von 2 Vektoren recht einfach überprüfen. 2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind, d.h. man kann die Vektoren mit einem Faktor multiplizieren und erhält den jeweils anderen Vektor. Ist das **nicht** möglich, sind die 2 Vektoren linear unabhängig.



**Beispiel.**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ linear abhängig, da } -2 \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot -3 \\ -2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

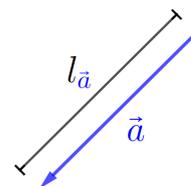
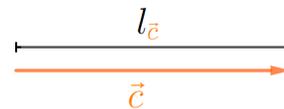
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig, da die Vektoren keine Vielfache voneinander sind}$$

### 2.3.3 Länge eines Vektors

Die Länge  $l$  eines Vektors  $\vec{v}$  wird durch Betragsstriche gekennzeichnet:  $l_{\vec{v}} = |\vec{v}|$ . Die Formel für die Berechnung der Länge eines Vektors lautet:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

*Länge eines Vektors*



**Beispiel.** Berechne die Länge des Vektors  $\vec{a}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

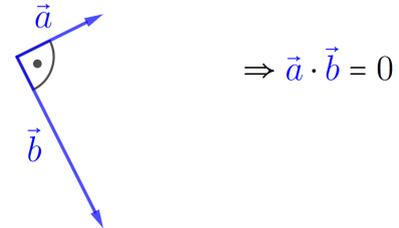
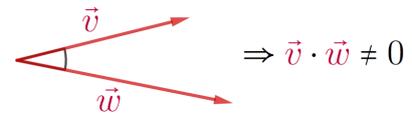
$$l_{\vec{a}} = |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

### 2.3.4 Skalarprodukt

Multipliziert man 2 Vektoren miteinander, erhält man das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. Die Rechenvorschrift lautet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

**Merke:** Ergibt das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{0}$ , so sind diese beiden Vektoren **orthogonal** zueinander, sie haben dementsprechend einen **rechten Winkel**. Überprüfung, ob ein rechter Winkel (Orthogonalität) zwischen 2 Vektoren vorliegt, somit mithilfe des Skalarprodukts!



**Beispiel.** Berechne das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sowie  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1 + 8 - 9 = 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind orthogonal!}$$

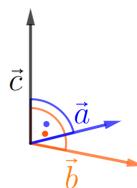
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) = 0 + 30 - 10 = 20 \neq 0$$

### 2.3.5 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt von 2 Vektoren liefert genau den Vektor, der **senkrecht/orthogonal zu beiden** Vektoren ist. D.h. sind 2 Vektoren gegeben und man sucht den Vektor, der orthogonal zu beiden Vektoren ist, kann man das Kreuzprodukt anwenden. Die Rechenvorschrift lautet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



*Schema für die Rechenvorschrift*

$a_1$	+	$b_2$	-	$b_1$	$a_2 b_3 - a_3 b_2$	
$a_2$		$b_3$		$b_2$		$a_3 b_1 - a_1 b_3$
$a_3$		$b_1$		$b_3$		$a_1 b_2 - a_2 b_1$
$a_1$		$b_2$		$b_1$		

**Beispiel.** Gesucht ist der Vektor, der orthogonal zu den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 6 \\ 3 + 3 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Vereinfache: } \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Man vereinfacht am Ende den Vektor und multipliziert ihn deshalb mit  $\frac{1}{2}$ , da mit kleineren Vektorkoordinaten einfacher zu rechnen ist und der „halbierte“ Vektor immernoch dieselbe Richtung besitzt (da linear abhängig!), weshalb er immernoch orthogonal zu den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist.

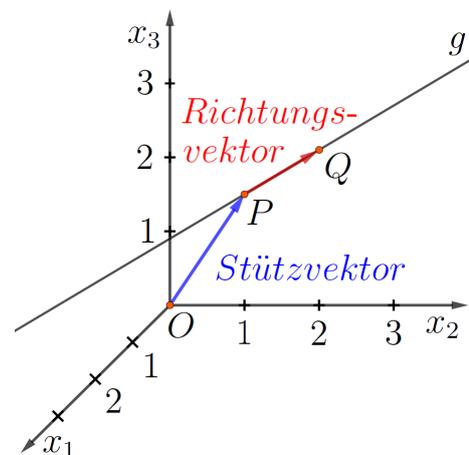
**Probe mithilfe des Skalarprodukts:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-9) + 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -9 + 12 - 3 = 0 \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-9) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) = -9 + 6 + 3 = 0 \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

## 2.4 Gerade

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Gerade  $g$  in der sogenannten Parameterform aufgestellt. Hierfür bedarf es zunächst einen **Stützvektor**, der die Gerade  $g$  vom Ursprung  $O$  aus „stützt/fixiert“. Dieser **Stützvektor** ist ein Ortsvektor vom Ursprung  $O$  zu einem gegebenen Punkt auf der Geraden  $g$  (Im Beispiel rechts ist der **Stützvektor** der Vektor  $\vec{OP}$ ). Da die Gerade  $g$  nun durch den **Stützvektor** fest an einen Punkt im Raum (im Beispiel ist es der Punkt  $P$ ) „fixiert“ ist, bedarf es nun noch einer Vorgabe der Richtung, der die Gerade  $g$  folgt. Diese Richtung wird durch den **Richtungsvektor** vorgegeben, der durch zwei gegebene Punkte auf der Geraden  $g$  bestimmt wird (im Beispiel rechts ist der **Richtungsvektor** der Vektor  $\vec{PQ}$ ). Allgemeine Parameterform einer Geraden  $g$ :



$$g: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$\vec{x}$  beschreibt alle Punkte, die auf der Geraden  $g$  liegen. Für den Parameter  $t$ , kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden. Je nachdem was für eine Zahl für den Parameter  $t$  eingesetzt wird, wird der **Richtungsvektor** um diesen Faktor verlängert, verkürzt oder

auch um  $180^\circ$  in die entgegengesetzte Richtung gedreht (bei negativem Faktor) und man landet dementsprechend in einem anderen Punkt auf der Geraden  $g$ .

**Beispiel.** Stellen Sie die Gerade  $g$  auf, die durch die beiden Punkte  $P(1|2|2)$  und  $Q(-2|1|1)$  verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Geraden aus, der den **Stützvektor** bildet:

Wir wählen  $P(1|2|2) \Rightarrow$  **Stützvektor:**  $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den **Richtungsvektor** von  $g$  mithilfe zweier gegebener Punkte auf der Geraden ( $P$  und  $Q$ ):

**Richtungsvektor:**  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Aufstellen der Gerade  $g$  in Parameterform:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 2.4.1 Geometrische Punktprobe bei Geraden

Ob ein Punkt  $P$  auf einer Geraden  $g$  liegt, wird durch die (geometrische) Punktprobe bestimmt. Dafür setzt man die Koordinaten des Punktes  $P$  in  $\vec{x}$  der Geradengleichung von  $g$  ein. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so **liegt** der Punkt  $P$  **auf** der Geraden  $g$ , andernfalls liegt der Punkt  $P$  NICHT auf der Geraden  $g$ .

**Beispiel.** Liegt der Punkt  $P(-1|1|4)$  auf der Geraden  $g: \vec{x} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

1. Einsetzen des Punktes  $P(-1|1|4)$  in  $\vec{x}$  der Geradengleichung von  $g$ :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 = -9 + 2t \quad | +9 \\ 1 = -3 + t \quad | +3 \\ 4 = -4 + 2t \quad | +4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 2t \quad | :2 \quad 4 = t \\ \Rightarrow 4 = t \quad \Rightarrow 4 = t \quad \Rightarrow \text{Der Punkt } P \text{ liegt auf der Geraden } g! \\ 8 = 2t \quad | :2 \quad 4 = t \end{array}$$

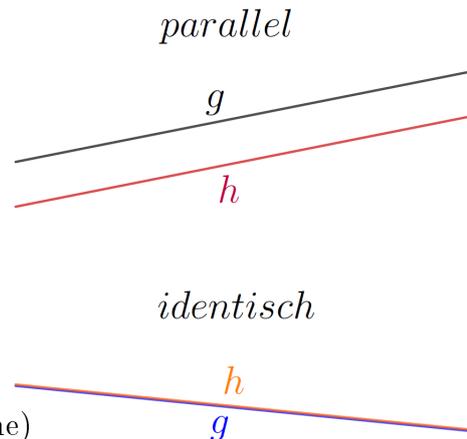
### 2.4.2 Lage von 2 Geraden

**Parallel:** 2 Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. wenn die beiden Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind.

**Beispiel.**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$  sind parallel, da:

$-2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$  (Richtungsvektoren sind Vielfache)



**Identisch:** 2 Geraden sind identisch, wenn sie parallel sind und durch die gleichen Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden parallel sind, überprüft man ob sie identisch sind, indem man den Stützvektor einer der beiden Geraden mit der anderen Geraden gleichsetzt (in die andere Gerade einsetzt). Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit nur einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so sind die Geraden identisch, andernfalls sind die 2 Geraden parallel, jedoch nicht identisch.

**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  ?

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:

$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

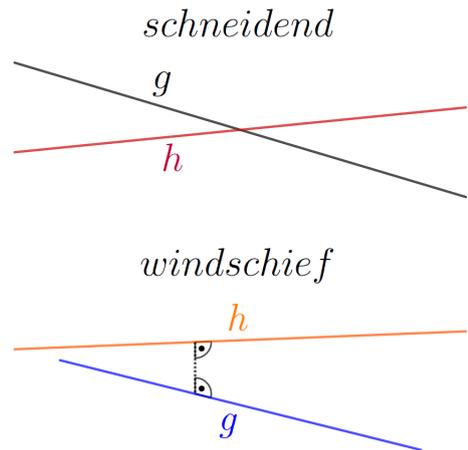
$\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind Vielfache (linear abhängig). Somit sind die beiden Geraden  $g$  und  $h$  parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob sie identisch sind oder nicht.

2. Gleichsetzen des Stützvektors der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$ :

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 = -9 + 4s \quad | +9 \\ 1 = -3 + 2s \quad | +3 \\ 4 = -4 + 4s \quad | +4 \end{array}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 8 = 4s \quad | :4 \quad 2 = s \\ 4 = 2s \quad | :2 \quad 2 = s \\ 8 = 4s \quad | :4 \quad 2 = s \end{array} \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind identisch!}$

**Schneidend:** 2 Geraden schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind und sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt schneiden. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden nicht parallel sind, überprüft man ob sie sich schneiden, indem man die beiden Geraden gleichsetzt. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 2 Parametern. Mithilfe der 1. und 2. Gleichung bestimmt man die Lösungen der beiden Parameter. Setzt man anschließend die Lösungen der 2 Parameter in die 3. Gleichung ein und die Gleichung ist „wahr/stimmt“, so schneiden sich die Geraden in einem Schnittpunkt, andernfalls sind die 2 Geraden **windschief**. Die Berechnung des Schnittpunkts der beiden Geraden erfolgt durch Einsetzen der berechneten Lösung eines Parameters in die zugehörige Geradengleichung. Durch anschließendes Auflösen erhält man die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts.



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$  und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 + 3t = 3 + 1s \quad | -s \\ 1 + 4t = 9 + 0s \\ 2 + 1t = 1 + 1s \quad | -s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \\ 1 + 4t = 9 \quad | -1 \\ 2 + t - s = 1 \quad | -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \\ 4t = 8 \quad | :4 \\ t - s = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3t - s = 3 \quad | t = 2 \text{ einsetzen} \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot 2 - s = 3 \quad | -6 \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -s = -3 \quad | \cdot (-1) \\ t = 2 \\ t - s = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} s = 3 \\ t = 2 \\ t - s = -1 \quad | t = 2 \text{ und } s = 3 \text{ einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad s &= 3 \\ t &= 2 && \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ schneiden sich!} \\ 2 - 3 &= -1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Berechnen des Schnittpunkts durch Einsetzen von  $t = 2$  in die Gerade  $g$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 3 \\ 1 + 2 \cdot 4 \\ 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{gemeinsamer Schnittpunkt } S(6|9|4)$$

**Windschief:** 2 Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden. D.h. es gibt immer einen Abstand zwischen den beiden Geraden (z.B. verläuft die eine Gerade „höher“ als die andere, weshalb sie sich nicht schneiden). Der Nachweis erfolgt nach dem gleichen Schema, nach dem man prüft, ob sie sich schneiden. Der Unterschied ist, dass beim Einsetzen der berechneten 2 Parameter in die 3. Gleichung, die 3. Gleichung „unwahr/nicht korrekt“ ist.

**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden  $g$  mit der Geraden  $h$  und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 4 + 2t & = & 0 + 1s \quad | -s \\ -1 + 7t & = & -2 - 3s \quad | +3s \\ 2 + 1t & = & 3 + 3s \quad | -3s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 4 + 2t - s & = & 0 \quad | -4 \\ -1 + 7t + 3s & = & -2 \quad | +1 \\ 2 + t - 3s & = & 3 \quad | -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2t - s & = & -4 \quad | -2t \\ 7t + 3s & = & -1 \\ t - s & = & 1 \end{array}$$

(Wir wenden hier das Einsetzungsverfahren bei der 1. und 2. Gleichung an, um  $s$  und  $t$  zu berechnen)

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} -s & = & -4 - 2t \quad | \cdot (-1) \\ 7t + 3s & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 3s & = & -1 \quad | s = 4 + 2t \text{ einsetzen} \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 3(4 + 2t) & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 7t + 12 + 6t & = & -1 \quad | -12 \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \\ 13t & = & -13 \quad | :13 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2t \quad | t = -1 \text{ einsetzen} \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4 + 2 \cdot (-1) \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \\ t - 3s & = & 1 \quad | t = -1 \text{ und } s = 2 \text{ einsetzen} \end{array}$$

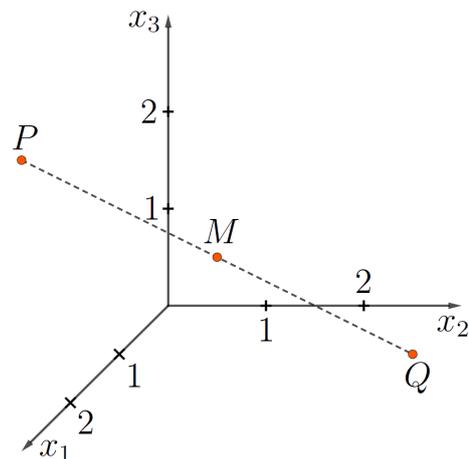
$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \end{array} \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind } \mathbf{windschief!}$$

$$-1 - 3 \cdot 2 \neq 1$$

## 2.5 Mittelpunkt einer Strecke

Die Koordinaten des Mittelpunkts  $M$  einer Strecke zwischen 2 Punkten  $P(p_1|p_2|p_3)$  und  $Q(q_1|q_2|q_3)$  berechnen sich folgendermaßen:

$$M \left( \frac{p_1 + q_1}{2} \mid \frac{p_2 + q_2}{2} \mid \frac{p_3 + q_3}{2} \right)$$



**Beispiel.** Gesucht ist der Mittelpunkt  $M$  der beiden Punkte  $P(1|-1|2)$  und  $Q(-3|1|-2)$ :

$$M \left( \frac{1 + (-3)}{2} \mid \frac{-1 + 1}{2} \mid \frac{2 + (-2)}{2} \right)$$

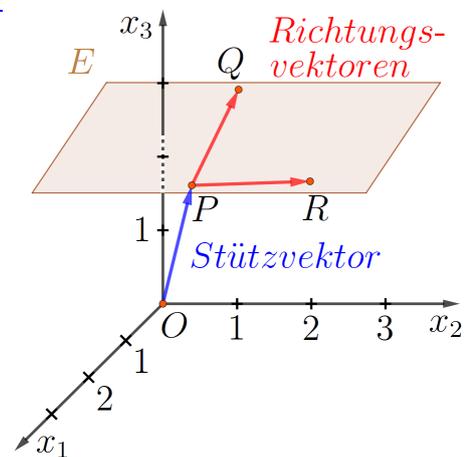
$\Rightarrow M(-1|0|0)$  ist der gesuchte Mittelpunkt

## 2.6 Ebene

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Ebene  $E$  entweder in der Parameterform, Koordinatenform oder Normalenform aufgestellt.

### 2.6.1 Parameterform

Für die Parameterform bedarf es zunächst einen **Stützvektor**, der die Ebene  $E$  vom Ursprung  $O$  aus „stützt/fixiert“. Dieser **Stützvektor** ist ein Ortsvektor vom Ursprung  $O$  zu einem gegebenen Punkt auf der Ebene  $E$  (Im Beispiel rechts ist der **Stützvektor** der Vektor  $\overrightarrow{OP}$ ). Für das weitere Verständnis der Definition der Parameterform einer Ebene stelle man sich vor, die Aufgabe ist es eine Platte (Ebene  $E$ ) fest mitten in einem Raum zu platzieren. Bisher liegt die Platte nur auf einem im Boden fest verankerten „Stab“ (dem **Stützvektor**) auf, weshalb sie noch sehr instabil ist und in alle Richtungen kippen kann. Eine erste Stütze/Fixierung wird durch das Anbringen einer Stange am Ende des Stabes geschaffen (dem **1. Richtungsvektor**, im Beispiel rechts  $\overrightarrow{PQ}$ ). Nun kann die Platte nur noch um die Achse der Stange seitlich wegkippen. Damit die Platte also fest im Raum fixiert ist, benötigen wir noch eine weitere Stange auf der die Platte aufliegt (dem **2. Richtungsvektor**, im Beispiel rechts  $\overrightarrow{PR}$ ). Wichtig ist, dass die beiden **Richtungsvektoren** linear unabhängig sind. Allgemeine Parameterform einer Ebene  $E$ :



$$E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{s}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{u}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$\vec{x}$  beschreibt alle Punkte, die auf der Ebene  $E$  liegen. Für die Parameter  $s$  und  $t$ , kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden.

**Beispiel.** Stellen Sie die Ebene  $E$  in Parameterform auf, die durch die Punkte  $P(2|-1|1)$ ,  $Q(1|0|3)$  und  $R(0|2|-1)$  verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Ebene aus, der den **Stützvektor** bildet:

$$\text{Wir wählen } P(2|-1|1) \Rightarrow \text{Stützvektor: } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die beiden **Richtungsvektoren** von  $E$  mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene ( $P$ ,  $Q$  und  $R$ ):

$$\text{1. Richtungsvektor: } \vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Richtungsvektor:  $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - (-1) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

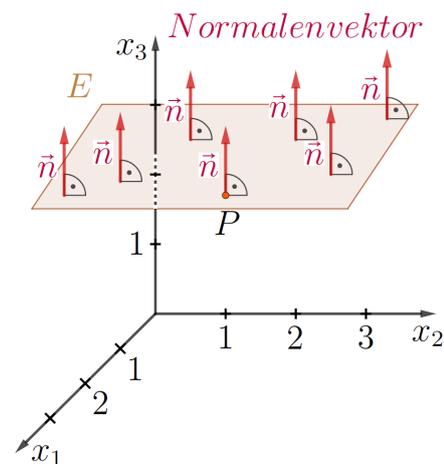
3. Aufstellen der Ebene  $E$  in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

### 2.6.2 Koordinatenform

Für die Koordinatenform bedarf es einen Punkt  $P$  auf der Ebene  $E$  und den sogenannten **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der Ebene  $E$ . Der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  hat die Eigenschaft, dass er orthogonal (im rechten Winkel) auf der Ebene  $E$  steht. Muss der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  berechnet werden, erfolgt dies durch das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{u}$  aus der Parameterform:

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \vec{n}$$



Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene  $E$  ist:

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$$

Das  $b$  berechnet man, indem in die Gleichung für  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die Punktkoordinaten des Punktes  $P$  eingesetzt werden. Ergebnis ist das  $b$ . Alle Punkte deren Koordinaten  $(x_1|x_2|x_3)$  die Gleichung erfüllen, definieren die Ebene  $E$  (liegen drauf).

**Beispiel.** Stellen Sie die Ebene  $E$  in Koordinatenform auf, die durch die Punkte  $P(2|-1|1)$ ,  $Q(1|0|3)$  und  $R(0|2|-1)$  verläuft.

1. Berechne 2 Richtungsvektoren von  $E$  mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene ( $P$ ,  $Q$  und  $R$ ) um den **Normalenvektor**  $\vec{n}$  bestimmen zu können:

1. Richtungsvektor:  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 0 - (-1) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor:  $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - (-1) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den **Normalenvektor**  $\vec{n}$  mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{u}$ :

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ -4 - 2 \\ -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Vereinfache:  $-1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

3. Berechne das **b** für die Koordinatenform mit einem Punkt der Ebene  $E$  und dem **Normalenvektor**  $\vec{n}$ :

Wir setzen  $P(2|-1|1)$  in die Gleichung ein:  $8 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 11 = b$

4. Aufstellen der Ebene  $E$  in Koordinatenform:

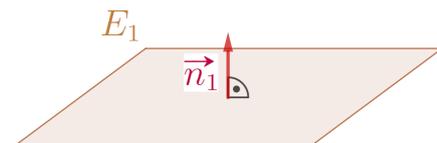
$$E: 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 11$$

### 2.6.3 Lage von 2 Ebenen

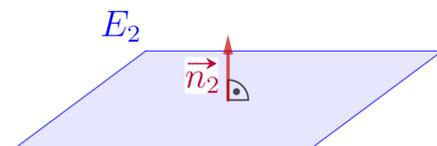
**Hinweis:** Um die Lage von 2 Ebenen rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die beiden Ebenen zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

*parallel*

**Parallel:** 2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind parallel, wenn ihre **Normalenvektoren**  $n_1$  und  $n_2$  Vielfache voneinander sind, d.h. die beiden **Normalenvektoren** der Ebenen sind linear abhängig.



**Beispiel.**  $E_1: 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$  und  $E_2: 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 4$  sind parallel, da:



$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ (Normalenvektoren sind Vielfache)}$$



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E_1: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \text{ und } E_2: -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2?$$

1. Untersuche ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind:  
 $\Rightarrow$  Normalenvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Schreibe die beiden Ebenengleichungen übereinander und wende den 1. Schritt des Additionsverfahrens an (Eliminiere die Variable  $x_1$ ):

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7 \\ \text{II} \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad | \cdot 2 \leftarrow + \\ \hline \text{III: I} + 2 \cdot \text{II} \quad 2x_1 + 2 \cdot (-x_1) + 3x_2 + 2 \cdot (-x_2) - 4x_3 + 2 \cdot 3x_3 = 7 + 2 \cdot (-2) \\ \text{III} \quad \quad \quad x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

3. Setze  $x_3 = t$  und berechne damit  $x_2$  und  $x_1$  in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\Rightarrow x_3 = t$$

Setze  $x_3 = t$  in Gleichung III ein und berechne  $x_2$  in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\text{III} \quad x_2 + 2x_3 = 3 \quad | \quad x_3 = t$$

$$x_2 + 2t = 3 \quad | \quad -2t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

Setze  $x_3 = t$  und  $x_2 = 3 - 2t$  in Gleichung I oder II ein und berechne  $x_1$  in Abhängigkeit von  $t$ :

$$\text{II} \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \quad | \quad x_3 = t \text{ und } x_2 = 3 - 2t$$

$$-x_1 - (3 - 2t) + 3t = -2$$

$$-x_1 - 3 + 2t + 3t = -2 \quad | \quad +3$$

$$-x_1 + 5t = 1 \quad | \quad -5t$$

$$-x_1 = 1 - 5t \quad | \quad \cdot (-1)$$

$$x_1 = -1 + 5t$$

4. Aufstellen der Schnittgerade  $g$  in Parameterform mithilfe der berechneten Variablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  in Abhängigkeit von  $t$ . Die „alleinstehende“ Zahl „ohne“  $t$  gibt die jeweilige Koordinate des **Stützvektors** an, während die Zahl vor  $t$  die jeweilige Koordinate des **Richtungsvektors** angibt. Mit diesen beiden Vektoren stellt man die Parameterform der Schnittgerade  $g$  schließlich auf:

$$x_1 = -1 + 5t$$

$$x_2 = 3 - 2t$$

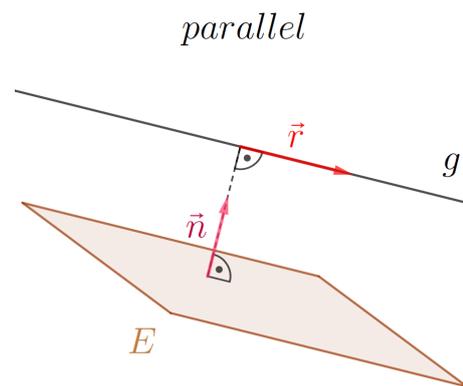
$$x_3 = 0 + 1t$$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist die Schnittgerade von } E_1 \text{ mit } E_2.$$

## 2.7 Lage von Gerade und Ebene

**Hinweis:** Um die Lage zwischen einer Geraden und Ebene rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die Ebene zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

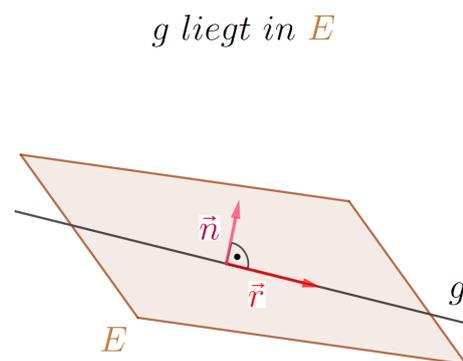
**Parallel:** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  sind parallel, wenn der **Normalenvektor**  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  im rechten Winkel (orthogonal) zu dem **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  der Gerade  $g$  verläuft. Rechnerisch lässt sich das mit dem Skalarprodukt bestimmen. Wenn also das Skalarprodukt des **Normalenvektors**  $\vec{n}$  mit dem **Richtungsvektor**  $\vec{r}$  **NULL** ergibt, so verlaufen  $E$  und  $g$  parallel zueinander:  $\vec{n} \cdot \vec{r} = \mathbf{0}$ .



**Beispiel.**  $E: 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$  und  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  sind parallel, da:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = -2 + 8 - 6 = \mathbf{0} \quad (\vec{n} \text{ und } \vec{r} \text{ sind orthogonal})$$

**$g$  liegt in  $E$ :** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  sind identisch, wenn sie parallel sind und durch dieselben Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade parallel sind, überprüft man ob  $g$  in  $E$  liegt, indem der Stützvektor der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung eingesetzt wird. Ist die Ebenengleichung nach Einsetzen des Stützvektors „wahr“, so liegt  $g$  in  $E$ , andernfalls sind sie parallel.



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der

Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$  und der Ebene  $E: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$ ?

1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = 12 + 4 - 16 = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$  Die Ebene  $E$  und die Gerade  $g$  sind parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob  $g$  in  $E$  liegt oder nicht.

2. Einsetzen des Stützvektors der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung von  $E$ :

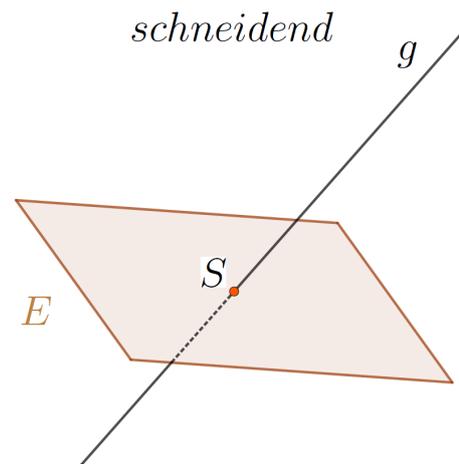
$$3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 8$$

$$-6 + 12 + 2 = 8$$

$$8 = 8$$

$\Rightarrow$  Die Gleichung  $8 = 8$  ist „wahr“, somit **liegt  $g$  in  $E$ !**

**Schneidend:** Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  schneiden sich **immer** in einem Schnittpunkt  $S$ , wenn sie **nicht parallel** sind. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade nicht parallel sind, kann man den gemeinsamen Schnittpunkt  $S$  berechnen, indem man die Gerade  $g$  in die Ebenengleichung einsetzt und diese nach dem Parameter der Geradengleichung auflöst. Setzt man den berechneten Parameterwert anschließend in die Geradengleichung ein, erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes  $S$ .



**Beispiel.** Wie ist die gegenseitige Lage der

Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  und der Ebene  $E: 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ ?

1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -15 - 1 - 8 = -24 \neq 0$$

$\Rightarrow$  Die Ebene  $E$  und die Gerade  $g$  sind somit **nicht parallel**.

2. Einsetzen der Geraden  $g$  in die Ebenengleichung von  $E$ :

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 8 - 3t \\ x_2 = -9 + t \\ x_3 = 0 - 4t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g \text{ in } E: 5(8 - 3t) - (-9 + t) + 2(-4t) = 1 \\ 40 - 15t + 9 - t - 8t = 1 \\ 49 - 24t = 1 \quad | -49 \\ -24t = -48 \quad | : (-24) \\ t = 2 \end{array}$$

3. Einsetzen des Parameters  $t = 2$  in die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Der gemeinsame Schnittpunkt der Ebene  $E$  und der Geraden  $g$  hat die Koordinaten  $S(2 | -7 | -8)$ .

## 2.8 Winkel

**Schnittwinkel zwischen Gerade und Gerade:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen 2 Geraden  $g$  und  $h$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Richtungsvektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  von  $g$  und  $h$  geteilt durch die Länge von  $\vec{r}$  mal die Länge von  $\vec{v}$ . Die Gleichung lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{v}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen den Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 9 + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 9}} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} \approx 0,2452 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,2452 && | \cos^{-1} \\ \Rightarrow \alpha &= \cos^{-1}(0,2452) \\ \Rightarrow \alpha &\approx 75,8^\circ \end{aligned}$$

**Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen einer Gerade  $g$  und einer Ebene  $E$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt des Richtungsvektors  $\vec{r}$  von  $g$  und des Normalenvektors  $\vec{n}$  von  $E$  geteilt durch die Länge von  $\vec{r}$  mal die Länge von  $\vec{n}$ . Die Gleichung lautet:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen der Ebene  $E: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$

$$\text{und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|12 + 4 - 10|}{\sqrt{16 + 1 + 25} \cdot \sqrt{9 + 16 + 4}}$$

$$= \frac{|6|}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,1719$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = 0,1719 \quad | \sin^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,1719)$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 9,9^\circ$$

**Schnittwinkel zwischen Ebene und Ebene:** Der Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen 2 Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  von  $E_1$  und  $E_2$  geteilt durch die Länge von  $\vec{n}_1$  mal die Länge von  $\vec{n}_2$ . Die Gleichung lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

**Beispiel.** Wie ist der Winkel zwischen den Ebenen

$$E_1 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \text{ und } E_2 : 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4?$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{|6 - 4 - 15|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{9 + 16 + 25}} \\ &= \frac{|-13|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} \approx 0,4914 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0,4914 \quad | \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,4914)$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 60,57^\circ$$

### 3 Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind anbei einführende Begriffe erläutert, die als Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen.

#### 3.1 Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

**Zufallsexperiment:** In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet ein Zufallsexperiment, ein Experiment (Versuch), das bei wiederholter Durchführung unter gleichen „Versuchsbedingungen“ unterschiedliche Ausgänge annehmen kann. Der Ausgang eines solchen Zufallsexperiments ist somit nicht voraussagbar, also zufällig.

**Beispiel.** Münzwurf, Würfeln, Roulette, Lotto, usw.

**Ergebnisraum:** Der Ergebnisraum  $E$  (oder auch als  $\Omega$  bezeichnet) in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet alle möglichen Ausgänge (**Ergebnisse**) eines Zufallsexperiments.

**Beispiel.**

Ergebnismenge Münzwurf:  $E = \{Kopf, Zahl\}$

Ergebnismenge Würfeln:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**Ereignis:** Als Ereignis wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraums  $E$  eines Zufallsexperiments bezeichnet. Ein Ereignis „tritt ein“ nach der Durchführung eines Zufallsexperiments, wenn das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ein Element des Ereignisses ist. Als **Gegenereignis** wird die „andere“ Teilmenge des Ergebnisraums  $E$  bezeichnet. Also alle Elemente, die nicht im Ereignis „enthalten“ sind.

**Beispiel.** Würfeln: Ergebnismenge  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis  $A$ : „Würfeln einer 2, 3 oder 4“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn entweder eine 2, 3 oder 4 gewürfelt wird

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $A$ “ tritt ein, wenn entweder eine 1, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis  $B$ : „Würfeln einer 1“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn eine 1 gewürfelt wird

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $B$ “ tritt ein, wenn entweder eine 2, 3, 4, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis  $C$ : „Die Augenzahl ist mindestens eine 4“

⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn die gewürfelte Augenzahl größer oder gleich 4 ist, somit 4, 5 oder 6

⇒ Das Gegenereignis „Nicht- $C$ “ tritt ein, wenn entweder eine 1, 2 oder 3 gewürfelt wird

**Zufallsvariable:** Eine Zufallsvariable  $X$  ordnet **jedem** Ergebnis eines Zufallsexperiments (also **jedem** Element des Ergebnisraums  $E$ ) eine Zahl zu.

**Beispiel.** Aus einer Tüte mit 10 Schrauben Inhalt werden 6 Schrauben entnommen mit der Zufallsvariable „ $X =$  Anzahl der defekten Schrauben“:

Ergebnis	0 defekt	1 defekt	2 defekt	3 defekt	4 defekt	5 defekt	6 defekt
$X$	0	1	2	3	4	5	6

**Beispiel.** In einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge:  $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, verliert der Spieler seine 2 Euro Einsatz

WENN einmal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück

WENN zweimal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz + 2 Euro

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Gewinn}$ “ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu:

Ergebnis	(Kopf Kopf)	(Kopf Zahl)	(Zahl Kopf)	(Zahl Zahl)
$X$	-2	0	0	2

**Wahrscheinlichkeitsverteilung:** Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nutzen wir den Buchstaben  $P$  („englisch probability = Wahrscheinlichkeit“) als Schreibweise:

$P(\text{Ereignis } A) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis } A \text{ eintritt}$

$P(X = k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X = k \text{ ist}$

$P(X \geq k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X \text{ **mindestens** so groß ist wie } k$

$P(X \leq k) = \text{Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable } X \text{ **höchstens** so groß ist wie } k$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraums  $E$ ) eine Wahrscheinlichkeit zu, dass es eintritt.

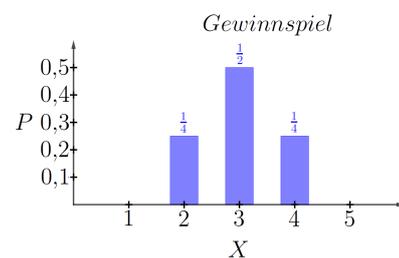
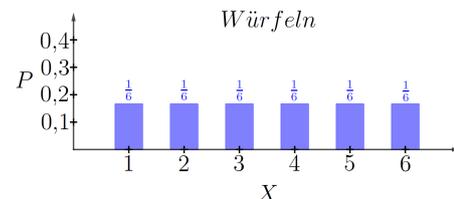
**Beispiel.** Würfeln:

Ergebnismenge:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Augenzahl}$ “ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu.

$X$	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Das Experiment ist ein **Laplace-Experiment**, da alle Ergebnisse (Ausgänge) des Zufallsexperiments „Würfeln“ **dieselbe** Wahrscheinlichkeit haben.



**Beispiel.** In einem Gewinnspiel mit 0 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge:  $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 2 Euro

WENN einmal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 3 Euro

WENN zweimal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 4 Euro

Die Zufallsvariable „ $X = \text{Gewinn}$ “ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu.

$X$	2	3	4
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

### 3.2 Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist ein anschauliches Hilfsmittel um die Ergebnisse eines Zufallsexperiments aufzuschreiben, insbesondere die Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsexperiments (z. B. Mehrmaliger Münzwurf, Mehrmaliges Würfeln, Mehrmaliges Drehen eines Glücksrads). Bei solch einem mehrstufigen Zufallsexperiments lassen sich sehr gut die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelexperimente sowie die Wahrscheinlichkeiten möglicher Ereignisse rechnerisch ermitteln.

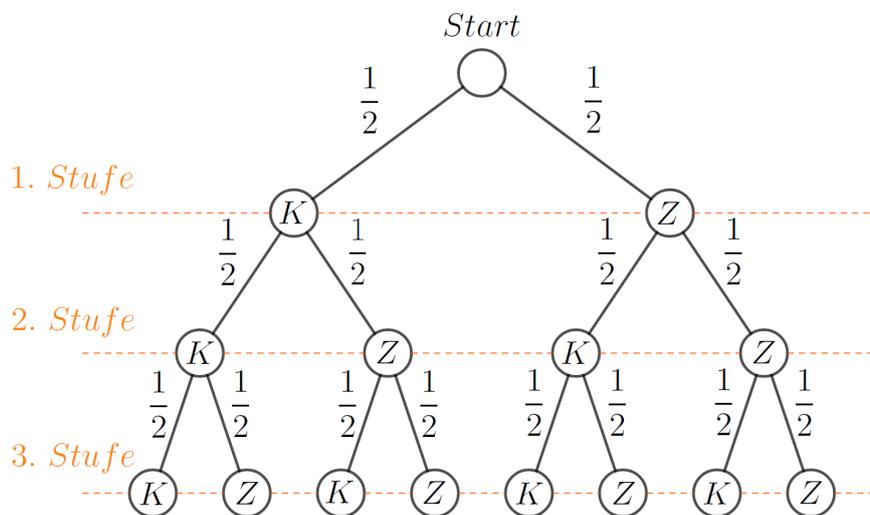
Um bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ein Baumdiagramm zu zeichnen gilt es zunächst die Stufen herauszufinden und die jeweiligen möglichen „Ergebnisketten“. Diese Ergebnisketten werden miteinander verbunden. Auf die Verbindungsstrecken schreibt man die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweils nachfolgenden Ergebnisses.

**Beispiel.** Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen:

Ergebnismenge pro Münzwurf:  $E = \{Kopf, Zahl\}$

Ereignis	<i>Kopf</i> ( <i>K</i> )	<i>Zahl</i> ( <i>Z</i> )
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Es gibt **3 Stufen** im Baumdiagramm, da die Münze dreimal geworfen wird.



**Pfad:** Der Pfad in einem Baumdiagramm entspricht einem Weg durch den Baum, also einer „Ergebniskette“. Ein Pfad startet immer im Startpunkt und endet in der letzten Stufe. Wirft man beispielsweise eine Münze dreimal hintereinander, dann entspricht jede mögliche Ergebniskette (Versuchsausgang)  $(K|K|K)$ ,  $(K|K|Z)$ ,  $(K|Z|K)$ ,  $(K|Z|Z)$ ,  $(Z|K|K)$ ,  $(Z|K|Z)$ ,  $(Z|Z|K)$ ,  $(Z|Z|Z)$ .

$(Z|K|K)$ ,  $(Z|K|Z)$ ,  $(Z|Z|K)$ ,  $(K|Z|Z)$  einem Pfad.

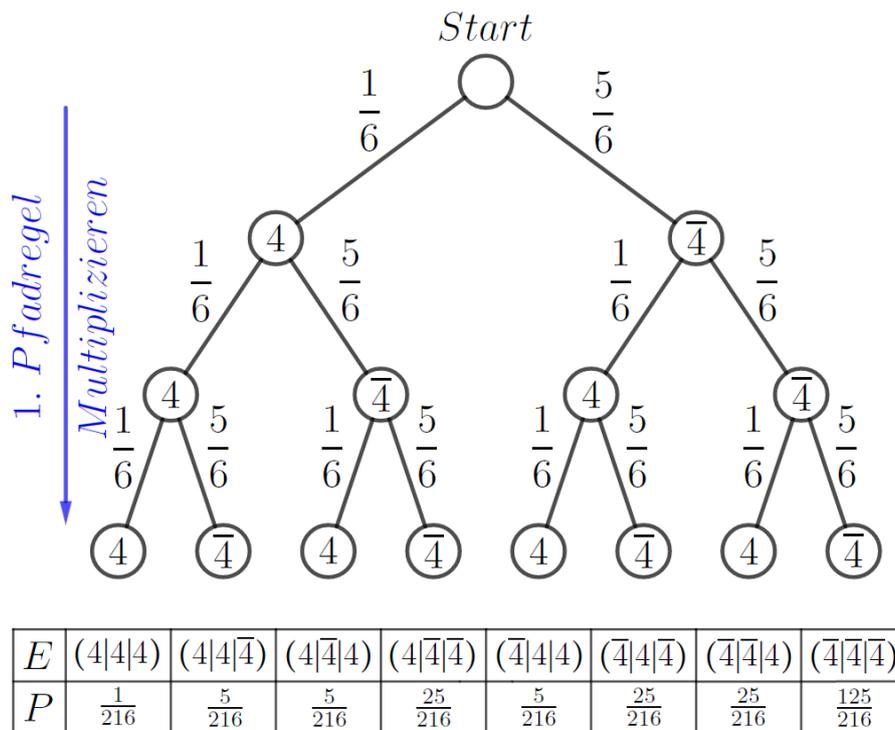
**1. Pfadregel:** Um die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Versuchsausgang (einen Pfad) zu bestimmen, **multipliziert** man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades miteinander.

**Beispiel.** Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dreimal hintereinander **keine** 4 gewürfelt?

Die Schreibweise für **Nicht-4** ist  $\bar{4}$ . Sie beinhaltet die Augenzahlen  $\bar{4} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ . Wir können die Ergebnismenge für jeden einzelnen Würfelwurf so schreiben:  $E = \{4, \bar{4}\}$

Ereignis	4	$\bar{4}$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Es gibt 3 Stufen im Baumdiagramm, da der Würfel dreimal geworfen wird.



**2. Pfadregel**

**Addieren**

Wir nutzen die **1. Pfadregel** um die Wahrscheinlichkeit für „dreimal hintereinander keine 4“ (Ergebniskette/Pfad:  $(\bar{4}|\bar{4}|\bar{4})$ ) zu bestimmen:

$$P((\bar{4}|\bar{4}|\bar{4})) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0,5787$$

**2. Pfadregel:** Umfasst ein Ereignis mehrere Versuchsausgänge (Pfade), so berechnet man die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, indem man die Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Pfade (Versuchsausgänge) miteinander **addiert**.

Z.B. könnte eine Fragestellung in obigem Beispiel sein: Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim dreimaligem Würfelwurf genau 2 Vieren gewürfelt?

Das Ereignis „Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“ umfasst die Pfade  $(4|4|\bar{4})$ ,  $(4|\bar{4}|4)$  und  $(\bar{4}|4|4)$ . Wir nutzen die **2. Pfadregel** um die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu bestimmen:

$$P(\text{„Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“}) = \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \approx 0,0694$$

### 3.3 Gegenwahrscheinlichkeit

Oftmals ist es einfacher die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (der „Gegenwahrscheinlichkeit“) zu bestimmen. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{Ereignis}) = 1 - P(\text{Gegenereignis})$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses ( $P(\text{Gegenereignis})$ ) also deutlich „einfacher“ und somit schneller zu berechnen ist (z.B. da im Baumdiagramm das Gegenereignis deutlich weniger Pfade beinhaltet, die es nach der 2. Pfadregel aufzuaddieren gilt), ist der Weg die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses über die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen effizienter.

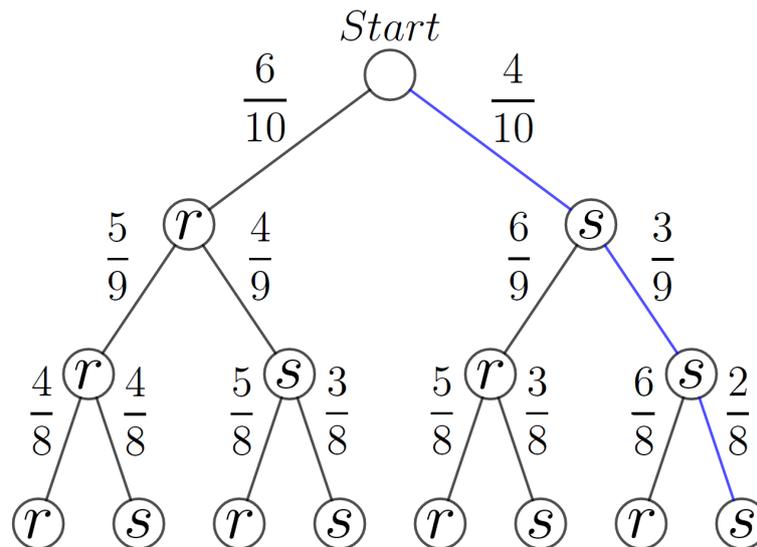
**Beispiel.** Aus einer Urne mit 6 roten und 4 schwarzen Kugeln werden drei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der gezogenen Kugeln rot?

1. Überlegen, ob die Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ einfacher ist:

Das Gegenereignis ist: „Keine der gezogenen Kugeln ist rot“ = „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“

⇒ Im Baumdiagramm beinhaltet dieses Gegenereignis bloß **einen Pfad**, weshalb die Wahrscheinlichkeit für dieses Gegenereignis deutlich einfacher zu bestimmen ist!

**Achtung:** Die Kugeln werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die gezogenen Kugeln kommen nicht wieder zurück in die Urne, d.h. nach der ersten Ziehung sind **nur noch 9 Kugeln** in der Urne und nach der zweiten Ziehung **nur noch 8 Kugeln!**



Somit ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ über die Gegenwahrscheinlichkeit einfacher:

$$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - P(\text{„Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“})$$

$$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0,9667$$

### 3.4 Erwartungswert

Bei einem Zufallsexperiment gibt der Erwartungswert den Wert an, den man durchschnittlich erzielt. Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die jedem Ergebnis des Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraumes  $E$ ) eine Zahl zuordnet. Um den Erwartungswert  $E(X)$  des Zufallsexperiments zu bestimmen, **multipliziert** man den  $X$ -Wert von jedem Ergebnis mit seiner jeweiligen Wahrscheinlichkeit  $P(X)$  und **addiert** diese Produkte aufeinander.

**Hinweis:** Zur Übersicht ist es hilfreich sich zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments in Tabellenform aufzuschreiben und anschließend den Erwartungswert zu berechnen.

**Beispiel.** Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Zufallsvariable „ $X = \text{Augenzahl}$ “ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu. Wie ist der Erwartungswert?

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments „Einmal würfeln“:

$X$	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert  $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$

⇒ Durchschnittlich erzielt man somit bei einem Würfelwurf eine 3,5.

**Beispiel.** Bei einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz werden aus einem Blackjack-Kartendeck mit 52 Karten zwei Karten **ohne** Zurücklegen hintereinander gezogen:

WENN der Spieler keine Dame aufdeckt, erhält der Spieler keinen Gewinn

WENN der Spieler unter den 2 Karten eine Dame aufdeckt, gewinnt er 10 Euro

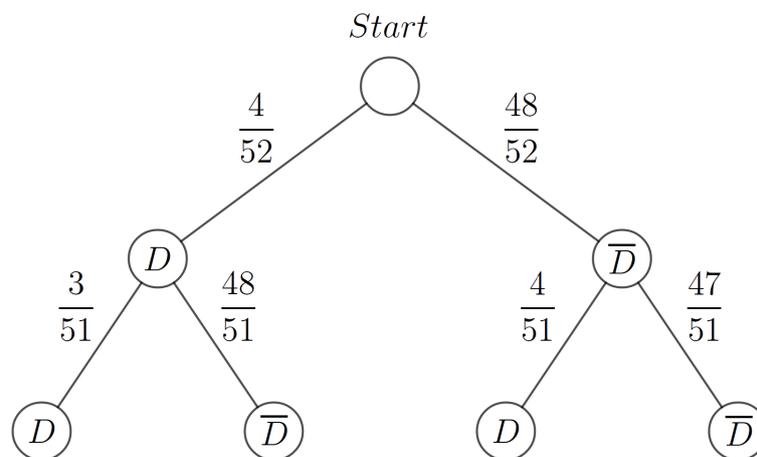
WENN der Spieler zwei Damen aufdeckt, gewinnt er 50 Euro

Ist dieses Gewinnspiel fair?

Bei dieser Fragestellung gilt es nun herauszufinden, was der erwartete Gewinn dieses Gewinnspiels ist. Entspricht der erwartete Gewinn den Einsatzkosten von 2 Euro, so ist dieses Spiel fair.

1. Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels mithilfe eines Baumdiagramms:

Der Buchstabe  $D$  steht für das Ergebnis eine Dame aufzudecken, während  $\bar{D}$  für das Ergebnis steht, keine Dame aufzudecken. **Achtung:** Die Karten werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die erste gezogene Karte bleibt aufgedeckt liegen und beim Ziehen der 2. Karte sind **nur noch 51 Karten** im Deck!



Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels „2 Karten ziehen“:

Ergebnis	$(D D)$	$(D \bar{D})$	$(\bar{D} D)$	$(\bar{D} \bar{D})$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$	$\frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}$	$\frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{16}{221}$	$\frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \frac{188}{221}$

2. Bestimmen des Erwartungswerts des Glückspiels:

$$E(\text{Gewinnspiel}) = 50 \cdot \frac{1}{221} + 10 \cdot \frac{16}{221} + 10 \cdot \frac{16}{221} + 0 \cdot \frac{188}{221} = \frac{370}{221} \approx 1,6742$$

⇒ Der erwartete Gewinn beträgt 1,67 Euro. Damit ist dieses Gewinnspiel mit einem Einsatz von 2 Euro nicht fair!

### 3.5 Fakultät $n!$

Die Fakultät einer natürlichen Zahl  $n!$  berechnet beispielsweise die Lösungen für folgende Fragen:

**Beispiel.**

1. Angenommen alle Becher unterscheiden sich farblich voneinander. Wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es beim Beerpong die 10 Becher auf einer Seite aufzustellen?

2. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 5 Bücher auf einen Schrank zu stellen?

1.  $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$  (verschiedene Möglichkeiten)

2.  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  (verschiedene Möglichkeiten)

**Hinweis:**  $0! = 1$  Ansonsten werden alle Fakultäten wie oben berechnet: Die Zahl wird jeweils multipliziert mit den Zahlen immer um eins absteigend bis zur 1.

### 3.6 Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient

**Bernoulli-Experiment:** Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit **immer genau 2 möglichen Versuchsausgängen (Ergebnissen)**:

z.B. („Treffer“ | „Nicht-Treffer“) = („Die 6 wird gewürfelt“ | „Die 6 wird nicht gewürfelt“), („Schraube ist defekt“ | „Schraube ist nicht defekt“), („Patient ist infiziert“ | „Patient ist nicht infiziert“), („Gewinn“ | „Niete“), („Erfolg“ | „Misserfolg“), („Kopf“ | „Zahl“), usw. (d.h. der Ergebnisraum  $E$  besteht immer aus genau 2 Elementen).

**Binomialkoeffizient:** Führt man ein Bernoulli-Experiment  $n$ -mal durch, d.h. man wiederholt das Experiment  $n$ -mal (mehrstufiges Bernoulli-Experiment), so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge  $n$ . Sei  $k$  die Anzahl an „Treffern“ in der Bernoulli-Kette und dementsprechend  $n - k$  die Anzahl an „Nicht-Treffern“. Da das Bernoulli-Experiment nur  $n$ -mal durchgeführt wird kann  $k$  (die Anzahl der „Treffer“) maximal so groß sein wie  $n$  ( $k \leq n$ ). Der Binomialkoeffizient berechnet bei  $k$  Treffern in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$ , wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) es

für die Reihenfolge der „Treffer“ und „Nicht-Treffer“ gibt. Die Schreibweise für den Binomialkoeffizienten ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Beispiel.**  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{1} = 56$

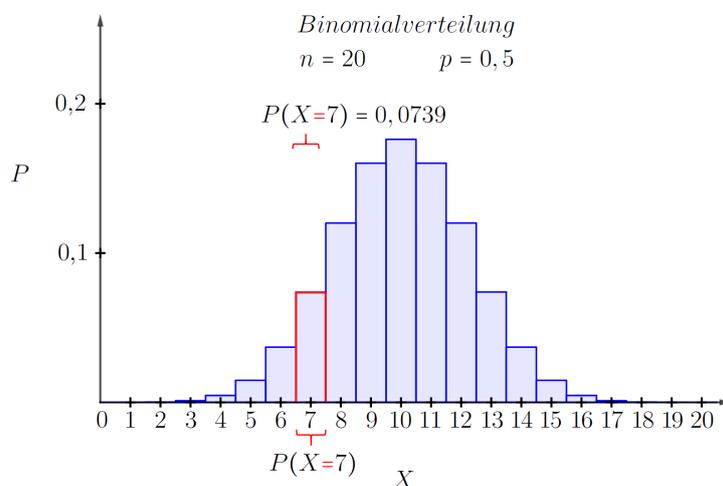
**Binomialverteilung:** Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeiten  $P$  von Bernoulli-Ketten. Ist die Erfolgswahrscheinlichkeit, in einem Bernoulli-Experiment einen „Treffer“ zu landen, gleich  $p$ , so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  **genau  $k$  Treffer** auftreten, folgendermaßen. Man kann entweder  $B(n, p, k)$  oder  $P(X = k)$  schreiben:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**Beispiel.** Eine Münze wird 20-mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit **genau 7-mal** Kopf zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“, also Kopf zu werfen, ist  $p = 0,5$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus  $n = 20$  Würfeln **genau  $k = 7$**  mal Kopf (Treffer) zu werfen:

$$P(X=7) = \binom{20}{7} \cdot 0,5^7 \cdot (1-0,5)^{20-7} = \frac{20!}{7! \cdot (20-7)!} \cdot 0,5^7 \cdot (0,5)^{13} \approx 0,0739$$



**Taschenrechner:** Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit  $P(X=k)$  (also „**genau  $k$  Treffer**“) mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „**binompdf**“ oder auch „**Binomial PD**“. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander  $n$ ,  $p$  und  $k$  ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

### 3.6.1 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Kommt in einer Aufgabenstellung zu einer binomialverteilten Zufallsvariable  $X$ , die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für „höchstens  $k$  Treffer“ oder „mindestens  $k$  Treffer“, so handelt es sich um eine kumulierte Wahrscheinlichkeit. Es ist nicht die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses:  $P(X = k)$ , sondern nach mehreren einzelnen Ereigniswahrscheinlichkeiten vereint/kumuliert:

$$P(X \leq k) \Rightarrow \text{„höchstens } k \text{ Treffer“}$$

$$P(X \geq k) \Rightarrow \text{„mindestens } k \text{ Treffer“}$$

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **höchstens 2 Schrauben** defekt?

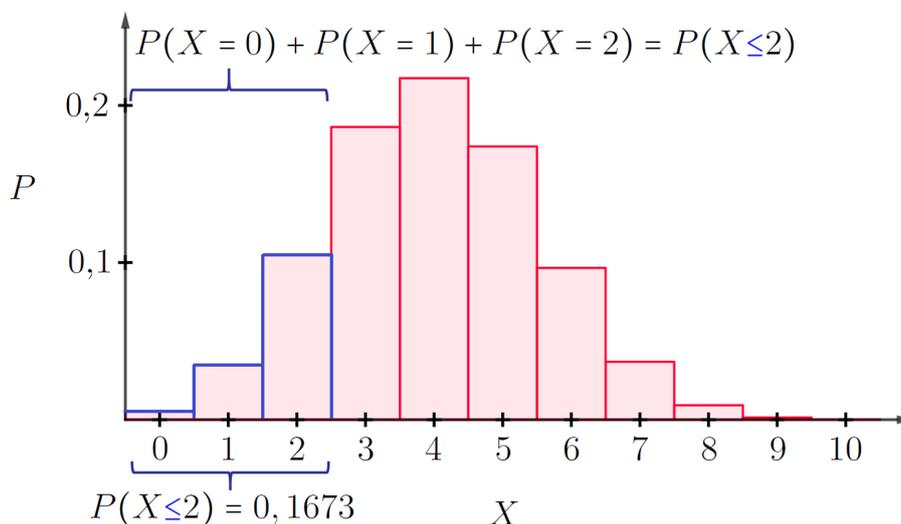
Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **höchstens  $k \leq 2$**  Schrauben zu erhalten:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot (0,6)^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (0,6)^8$$

$$\approx 0,1673$$

*Binomialverteilung*  
 $n = 10$        $p = 0,4$



**Taschenrechner:** Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq k)$  (also „höchstens  $k$  Treffer“) mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „binomcdf“ oder auch

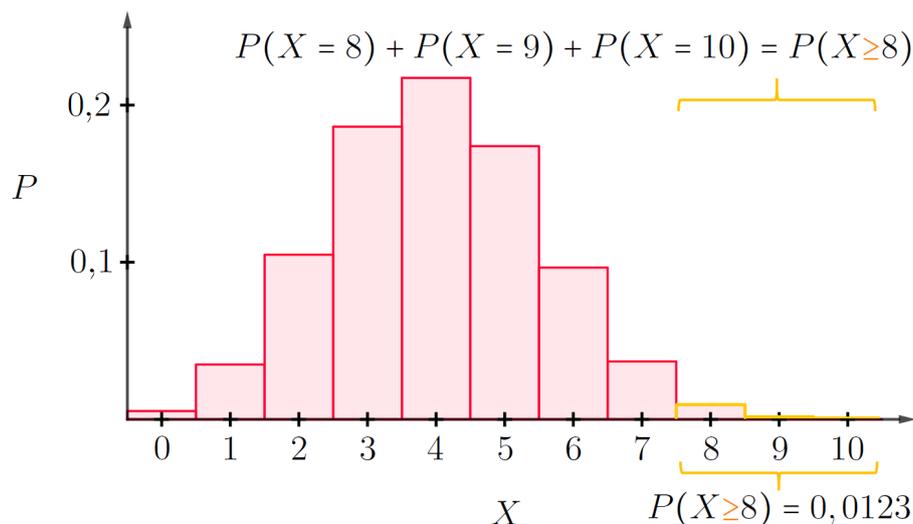
„Binomial CD“. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander  $n$ ,  $p$  und  $k$  ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **mindestens 8 Schrauben** defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **mindestens  $k \geq 8$  Schrauben** zu erhalten:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\
 &= \binom{10}{8} \cdot 0,4^8 \cdot (0,6)^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,4^9 \cdot (0,6)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot (0,6)^0 \\
 &\approx 0,0123
 \end{aligned}$$

*Binomialverteilung*  
 $n = 10$        $p = 0,4$



**Taschenrechner:** Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$  (also „**mindestens  $k$  Treffer**“) gibt es keine Funktion im Taschenrechner. Man muss zunächst die Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$  mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$

Nun kann man im Taschenrechner wieder über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“ die Wahrscheinlichkeit für  $P(X \leq k - 1)$  (also „**höchstens  $k - 1$  Treffer**“) ausrechnen. 1 Minus das Ergebnis liefert dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq k)$ .

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **mindestens 8 Schrauben** defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt  $p = 0,4$ . Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit  $n = 10$  Schrauben **mindestens  $k \geq 8$**  Schrauben zu erhalten:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 8 - 1) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,9877 = 0,0123$$

### 3.6.2 Erwartungswert

Für die Berechnung des Erwartungswerts  $\mu$  (auch  $E(X)$ ) bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von  $p$  gilt:

$$\mu = n \cdot p$$

**Beispiel.** Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% sind untersuchte Krankenhauspatienten mit einem Grippevirus infiziert. Was ist der Erwartungswert, der mit einem Grippevirus infizierten Patienten, bei einer Untersuchung von 200 zufällig ausgewählten Patienten in einem Krankenhaus?

Der Erwartungswert für eine Trefferwahrscheinlichkeit von  $p = 0,05$ , dass ein Krankenhauspatient am Grippevirus infiziert ist, bei der Untersuchung von  $n = 200$  zufällig ausgewählten Patienten in einem Krankenhaus ist:

$$\mu = 200 \cdot 0,05 = 10$$

### 3.6.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt an, wie „weit“ die einzelnen  $X$ -Werte **im Durchschnitt** vom Erwartungswert  $\mu$  (auch  $E(X)$ ) „entfernt“ sind. Sie gibt uns also die **mittlere Abweichung** der Streuung um den Erwartungswert herum an. Für die Berechnung der Standardabweichung  $\sigma$  bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von  $p$  und der entsprechenden Nicht-Trefferwahrscheinlichkeit von  $q = 1 - p$  gilt:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

**Beispiel.** Nach Auswertung der Daten eines festinstallierten Blitzers begehen auf der zugehörigen Landstraße mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von  $100 \text{ km/h}$  15% aller vorbeifahrenden Fahrzeuge eine Geschwindigkeitsüberschreitung. Das örtliche Ordnungsamt beschließt: Liegt in einer anschließenden Stichprobe von 200 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Geschwindigkeitsüberschreitungen um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, bauen sie den Blitzler ab. Ab welcher Anzahl von Geschwindigkeitsüberschreitungen in der Stichprobe von 200 Messungen lässt das Ordnungsamt den Blitzler stehen?

Der Erwartungswert für eine Trefferwahrscheinlichkeit von  $p = 0,15$ , dass ein Fahrzeug bei der Messung die Geschwindigkeit überschreitet, in der Stichprobe von  $n = 200$  Messungen ist:

$$\mu = 200 \cdot 0,15 = 30$$

Die Standardabweichung für  $n = 200$ ,  $p = 0,15$  und  $q = 1 - p = 1 - 0,15 = 0,85$  ist:

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \approx 5,05$$

Zahl der Geschwindigkeitsüberschreitungen um eine Standardabweichung  $\sigma = 5,05$  unter dem Erwartungswert  $\mu = 30$  beträgt:  $\mu - \sigma = 30 - 5,05 = 24,95$

Somit lässt das Ordnungsamt ab der Anzahl von 25 Geschwindigkeitsüberschreitungen (es gibt nur **ganze** Überschreitungen) den Blitzler stehen.

### 3.7 Lagemaße und Streumaße von Stichproben

Um die Lage- und Streumaße einer Stichprobe zu bestimmen, werden zunächst die Daten der Stichprobe aufsteigend nach Werten **sortiert**, sofern die Stichprobe noch nicht sortiert vorliegt. Die Lagemaße geben Auskunft über die Verteilung der Stichprobe:

**Modus:** Der Modus ist der Wert, der **am häufigsten** in der Stichprobe vorkommt.

**Median:** Liegt bei einer Stichprobe eine ungerade Anzahl an Datenwerten vor, so ist der Median/Zentralwert der Wert, der **genau in der Mitte** (im Zentrum) der sortierten Stichprobe „steht“. Liegt bei einer Stichprobe eine gerade Anzahl an Datenwerten vor, so ist der Median der **Durchschnitt der beiden mittleren Werte** der sortierten Stichprobe (Berechnung:  $\frac{m_1+m_2}{2}$ ).

**Mittelwert:** Der Mittelwert  $\bar{x}$  (auch arithmetisches Mittel) ist der **Durchschnittswert** aller Datenwerte, die in der Stichprobe vorkommen. Für die Berechnung addiert man alle vorhandenen Datenwerte der Stichprobe ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ) und teilt diese Summe

durch die Gesamtanzahl  $n$  aller Datenwerte in der Stichprobe.

$$\text{Mittelwert} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Die Streumaße geben Auskunft darüber, wie stark die Datenwerte einer Stichprobe um ihren Mittelwert streuen/wie „weit“ sie durchschnittlich von dem Mittelwert „entfernt“ sind:

**Varianz:** Die Varianz  $V$  gibt die **durchschnittliche** quadratische Abweichung vom Mittelwert  $\bar{x}$  der Stichprobe an. Die Berechnung erfolgt mit  $\bar{x}$ , allen vorhandenen Datenwerten der Stichprobe  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  und der Gesamtanzahl  $n$  aller Datenwerte folgendermaßen:

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

**Standardabweichung:** Die Standardabweichung  $s$  gibt an, wie „weit“ die einzelnen Datenwerte der Stichprobe **im Durchschnitt** vom Mittelwert  $\bar{x}$  „entfernt“ sind. Die Standardabweichung  $s$  erhält man, indem man von der Varianz  $V$  die Wurzel zieht.

$$s = \sqrt{V} \quad \Rightarrow \quad \text{somit ist die Varianz andersrum } V = s^2$$

**Beispiel.** In einer Straßenumfrage werden 6 Passanten nach ihrem Kontostand gefragt, wobei sie in ihrer Angabe auf Tausender runden sollen. Die Passanten geben folgende Kontostände an:  $P1 = 2000$  Euro,  $P2 = 7000$  Euro,  $P3 = 0$  Euro,  $P4 = 2000$  Euro,  $P5 = 45000$  Euro und  $P6 = 8000$  Euro (Urliste). Bestimmen Sie Modus, Median, Mittelwert, Varianz und die Standardabweichung dieser Stichprobe.

Da insgesamt 6 Passanten in der Stichprobe befragt wurden, ist der Stichprobenumfang/Gesamtzahl aller Datenwerte  $n = 6$ . Zunächst werden die Kontostände aufsteigend sortiert.

Sortierte Stichprobe (Rangliste):  $\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{2000}_{x_2}, \underbrace{2000}_{x_3}, \underbrace{7000}_{x_4}, \underbrace{8000}_{x_5}, \underbrace{45000}_{x_6}$

Man kann auch eine Verteilungstabelle anfertigen:

Kontostand (in Euro)	0	2000	7000	8000	45000
Anzahl	1	2	1	1	1

Da der Wert 2000 in dieser Stichprobe am häufigsten vorkommt, ist der Modus = 2000.

Da eine gerade Anzahl an Datenwerten ( $n = 6$ ) vorliegt, ist der Median der Durchschnitt der beiden mittleren Werte der sortierten Stichprobe. Bei insgesamt  $n = 6$  Werten befinden sich die beiden mittleren Werte an den Stellen  $x_3$  und  $x_4$ , weshalb:

$$\text{Median} = \frac{2000 + 7000}{2} = 4500$$

$$\text{Mittelwert} = \bar{x} = \frac{0 + 2000 + 2000 + 7000 + 8000 + 45000}{6} \approx 10666,67$$

Im Durchschnitt besitzt einer der 6 befragten Passanten somit 10666,67 Euro.

Für die Varianz  $V$  ergibt sich durch die Formel:

$$V = \frac{(0-10666,67)^2 + (2000-10666,67)^2 + (2000-10666,67)^2 + (7000-10666,67)^2 + (8000-10666,67)^2 + (45000-10666,67)^2}{6} = 243888888,9$$

$$\text{Standardabweichung } s = \sqrt{V} = \sqrt{243888888,9} = 15616,94$$

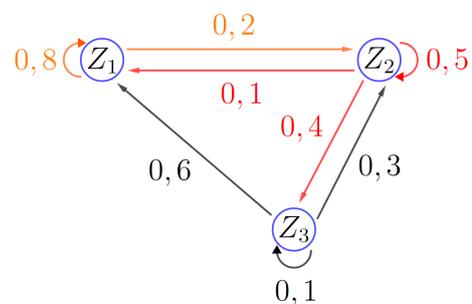
### 3.8 Stochastische Prozesse

Stochastische Prozesse beschreiben Systeme, die in regelmäßig aufeinander folgenden Zeitpunkten mit konstanten/immer gleichen Wahrscheinlichkeiten zwischen verschiedenen Zuständen wechseln und dabei eventuell irgendwann zur Ruhe kommen.

#### 3.8.1 Übergangsdigramm/-graph

Die Zustandsänderungen lassen sich sehr anschaulich durch Übergangsdigramme/-graphen oder Übergangsmatrizen darstellen. In einem Übergangsdigramm werden Zustände und deren Übergangswahrscheinlichkeiten, mit denen ein Objekt von dem einen in einen anderen Zustand wechselt, dargestellt. Oder das Übergangsdigramm gibt die Anteile der Objekte an, die während eines Zeitraums von einem Verteilungszustand in einen anderen übergehen.

Die einzelnen möglichen Zustände  $Z_1, Z_2, \dots$  werden im Übergangsdigramm in **Kreisen** gekennzeichnet. Ein Pfeil bedeutet einen Übergang z.B. **von** Zustand  $Z_2 \rightarrow$  **nach** Zustand  $Z_3$ . Ein Pfeil als „Halbkreis“, der wieder in denselben Zustand „führt“, bedeutet, dass das Objekt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit/einem gewissen Anteil in dem gleichen Zustand verbleibt. Die Zahlen auf den Pfeilen geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit/welchem Anteil Objekte von einem Zustand in einen anderen wechseln. Für alle Pfeile, die von einem Zustand „weggehen“ (Dazu zählt auch der Pfeil, der wieder in denselben Zustand zurückführt!) gilt, dass deren Summe **immer 1 ergeben muss!** Siehe Abbildung:



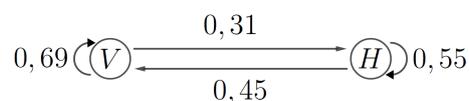
$$0,8 + 0,2 = 1$$

$$0,1 + 0,5 + 0,4 = 1$$

$$0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$$

**Beispiel.** In Partyhäusern gehen alle Schüler jeden Samstag feiern. Es stehen ihnen zum Feiern jeden Samstag die beiden Schülerdiscotheken „Vollgas“ (V) und „Halbgas“ (H) zur Verfügung. Es kommt vor, dass die Schüler von Woche zu Woche zwischen den beiden Discotheken hin und her wechseln. Jede Woche wechseln 31% der Gäste der Disco Vollgas die Location und gehen ins Halbgas, während andersherum wöchentlich 45% der Gäste der Disco Halbgas ins Vollgas wechseln. Stelle diesen wöchentlichen Wechsel mithilfe eines Übergangdiagramms dar.

Da jede Woche 31% der Gäste vom Vollgas ins Halbgas wechseln, bleiben jede Woche 69% dem Vollgas treu und gehen erneut dorthin ( $0,31 + 0,69 = 1 \checkmark$ ). Dementsprechend bleiben dem Halbgas, bei einer Wechselquote von 45%, 55% der Gäste wöchentlich treu ( $0,45 + 0,55 = 1 \checkmark$ ). Somit ergibt sich folgendes Übergangdiagramm:



### 3.8.2 Matrixmultiplikation, Matrix-Vektor-Produkt, Potenzieren von Matrizen

**Matrixmultiplikation:** Um Matrizen miteinander multiplizieren zu können, muss die Spaltenanzahl der Matrix **links** vom Malzeichen gleich der Zeilenanzahl der Matrix **rechts** vom Malzeichen sein. Die Ergebnismatrix nach der Multiplikation hat genau so viele Zeilen, wie die linke Matrix und genau so viele Spalten wie die rechte Matrix. Z.B.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (2 Zeilen und 3 Spalten)}$$

$$\text{Matrix } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 2 Spalten)}$$

Das Produkt  $A \cdot B$  ist möglich, da die linke Matrix  $A$  **drei Spalten** besitzt und die rechte Matrix  $B$  die gleiche Anzahl an **Zeilen (3)** besitzt. Für die Ergebnismatrix  $C$  gilt somit:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C \text{ (Ergebnismatrix hat 2 Zeilen und 2 Spalten)}$$

Die Berechnung der einzelnen Einträge der Ergebnismatrix erfolgt jeweils durch Verrechnung der einzelnen **Zeilen** der linken Matrix mit den einzelnen **Spalten** der rechten Matrix als Skalarprodukt, wie folgt:

Berechnung des Eintrags 1. Zeile, 1. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 1. Zeile, 2. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 2. Zeile, 1. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & \end{pmatrix}$$

Berechnung des Eintrags 2. Zeile, 2. Spalte der Ergebnismatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**Matrix-Vektor-Produkt:** Um eine Matrix mit einem Vektor multiplizieren zu können, muss die Spaltenanzahl der Matrix **links** vom Malzeichen gleich der Zeilenanzahl des Vektors **rechts** vom Malzeichen sein. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist **immer** ein Vektor, der sogenannte Ergebnisvektor. Der Ergebnisvektor nach der Multiplikation hat genau so viele Zeilen, wie die linke Matrix. Z.B.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

$$\text{Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 1 Spalte)}$$

Das Produkt  $A \cdot \vec{v}$  ist möglich, da die linksstehende Matrix  $A$  **drei Spalten** besitzt und der rechtsstehende Vektor  $\vec{v}$  die gleiche Anzahl an **Zeilen (3)** besitzt. Für den Ergebnisvektor gilt somit:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ (Ergebnisvektor hat 3 Zeilen)}$$

Die Berechnung der einzelnen Einträge des Ergebnisvektors erfolgt analog zur Matrixmultiplikation, jeweils durch Verrechnung der einzelnen **Zeilen** der linksstehenden Matrix mit dem rechtsstehenden Vektor als Skalarprodukt, wie folgt:

Berechnung 1. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Berechnung des 2. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Berechnung des 3. Eintrags des Ergebnisvektors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot -2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + -1 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

**Potenzieren von Matrizen:** Um eine Matrix mit sich selbst multiplizieren zu können, muss sie **quadratisch** sein. D.h. damit eine Matrix potenziert werden kann, muss sie die gleiche Anzahl an Zeilen, wie Spalten haben (dann spricht man von einer quadratischen Matrix). Die Ergebnismatrix hat folglich genau so viele Zeilen und Spalten, wie die zu potenzierende Matrix. Z.B.

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ (3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

Das Potenzieren von  $A$ , z.B.  $A^2$  oder  $A^3$  usw., ist möglich, da die Matrix  $A$  quadratisch ist (3 Zeilen und 3 Spalten). Die Berechnung der Ergebnismatrix erfolgt analog zur Matrixmultiplikation. Z.B. ist  $A^2$  folglich:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Ergebnismatrix hat } \\ \text{3 Zeilen und 3 Spalten)}$$

### 3.8.3 Stochastische Übergangsmatrix, Zustandsvektor und Folgeverteilung, Vorherige Verteilung/Rückwärts-Rechnen

Die Zustandsänderungen eines stochastischen Prozesses lassen sich sehr anschaulich durch Übergangsdigramme/-graphen oder stochastischen Übergangsmatrizen darstel-

len. In einer stochastischen Übergangsmatrix werden die Übergangswahrscheinlichkeiten, mit denen ein Objekt von dem einen in einen anderen Zustand wechselt, tabellarisch dargestellt. Die stochastische Übergangsmatrix kann auch die Anteile der Objekte angeben, die während eines Zeitraums von einem Verteilungszustand in einen anderen übergehen.

In der stochastischen Übergangsmatrix werden zeilenweise die Zugänge in einen Zustand (**nach**) und spaltenweise die Abgänge aus einem Zustand (**von**) notiert. In einer stochastischen Übergangsmatrix **gilt immer**:

1. Sie ist quadratisch (gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten)
2. Ihre Einträge liegen zwischen 0 und 1
3. Die Summe jeder Spalte ergibt 1

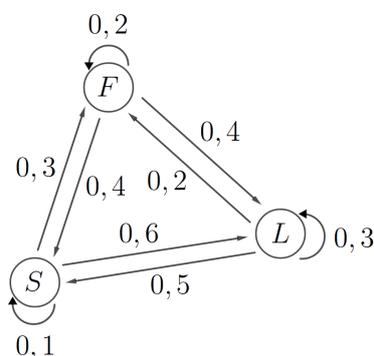
Beispiel einer stochastischen Übergangsmatrix  $U$  mit 3 Zuständen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\begin{array}{l}
 \text{nach} \\
 A \\
 B \\
 C
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0,3 & 0,2 & 0,6 \\
 0,5 & 0,4 & 0,1 \\
 0,2 & 0,4 & 0,3
 \end{pmatrix}
 = U \text{ (Übergangsmatrix)}$$

Summe:  $= 1 = 1 = 1$

Eine Übergangsmatrix lässt sich auch aus einem Übergangsdiagramm übertragen, was im folgenden Beispiel durchgeführt wird.

**Beispiel.** In einem kleinen 24h-Freizeitpark, bestehend aus 3 Achterbahnen, sind täglich 1000 Besucher. Diese 1000 Besucher verteilen sich auf die 3 Achterbahnen (und ihre Warteschlangen) mit den Namen „Free-Fall“ (F), „Looping“ (L) und „Speedo“ (S). Im Laufe des letzten Monats hat sich gezeigt, dass es zwischen den 3 Achterbahnen (und ihren Warteschlangen) von Stunde zu Stunde Verschiebungen der Besucher gibt. Das untenstehende Übergangsdiagramm beschreibt diese stündlichen Verschiebungen.



Bestimme die Übergangsmatrix  $U$ .

Die 3 Achterbahnen ( $F$ ,  $L$ ,  $S$ ) sind die 3 Zustände, in denen sich die Besucher des Freizeitparks befinden können. Die Pfeile an den Zuständen geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der Besucher **von** einem Zustand  $\rightarrow$  **nach** einem Zustand wechseln. Daraus ergibt sich die folgende Übergangsmatrix  $U$ :

$$\begin{array}{c} \text{von} \\ F \quad L \quad S \\ \text{nach} \end{array} \begin{array}{c} F \\ L \\ S \end{array} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} = U$$

$$\text{Summe:} \quad = 1 \quad = 1 \quad = 1 \quad \checkmark$$

Der **Zustandsvektor**  $\vec{v}$  gibt die Verteilung aller Besucher auf die Zustände/Achterbahnen an. Am Anfang befinden sich 290 Besucher in der Speedo, 240 Besucher in der Free-Fall und 470 Besucher in der Looping Achterbahn. (**Hinweis:** Der Zustandsvektor **muss** nach derselben Zustands-Reihenfolge, wie in der Übergangsmatrix aufgestellt werden!) Somit ergibt sich für die Anfangsverteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$ :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F \\ L \\ S \end{array}$$

Die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_2$  nach einer Stunde erhält man durch Multiplikation der Übergangsmatrix  $U$  mit der vorhergehenden Verteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$ :

$$U \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229 \\ 411 \\ 360 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$$

Die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_3$  nach noch einer weiteren Stunde, also nach 2 Stunden vom Anfang betrachtet, erhält man durch Multiplikation der Übergangsmatrix  $U$  mit der vorhergehenden Verteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_2$ :

$$U \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 229 \\ 411 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 236 \\ 430,9 \\ 333,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 236 \\ 431 \\ 333 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Hat man einen Taschenrechner zur Verfügung gibt es eine schnelle Möglichkeit die Folgeverteilungen zu berechnen. Für die Folgeverteilung  $\vec{v}_3$  nach 2 Stunden gilt, da  $U \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ :

$$U \cdot \vec{v}_2 = U \cdot \underbrace{U \cdot \vec{v}_1}_{\vec{v}_2} = U^2 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix}}_{\text{Taschenrechner}} = \begin{pmatrix} 236 \\ 430,9 \\ 333,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 236 \\ 431 \\ 333 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

Somit gilt für die **Folgeverteilung**  $\vec{v}_4$  nach **3** Stunden, da  $U^2 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_3$ :

$$U \cdot \vec{v}_3 = U \cdot \underbrace{U^2 \cdot \vec{v}_1}_{\vec{v}_3} = U^3 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix}}_{\text{Taschenrechner}} = \begin{pmatrix} 233,31 \\ 423,53 \\ 343,16 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 233 \\ 424 \\ 343 \end{pmatrix} = \vec{v}_4$$

Wie ist die Folgeverteilung demnach nach **9** Stunden?

$$U^9 \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^9 \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix}}_{\text{Taschenrechner}} = \begin{pmatrix} 234,04 \\ 425,53 \\ 340,42 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 234 \\ 426 \\ 340 \end{pmatrix}$$

Statt der Folgeverteilung kann man auch die **vorherige Verteilung** durch „**Rückwärts-Rechnen**“ ermitteln. Möchte man „zurückschauen“ und die Verteilung  $\vec{v}_0$  eine Stunde vor der Anfangsverteilung/Zustandsvektor  $\vec{v}_1$  berechnen, gibt es dafür 2 Möglichkeiten.

**1.** Mithilfe eines Linearen Gleichungssystems, da  $U \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$ :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0,2x + 0,2y + 0,3z = 240 \\ 0,4x + 0,3y + 0,6z = 470 \\ 0,4x + 0,5y + 0,1z = 290 \end{array}$$

Der Taschenrechner liefert die Lösung  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$

**2.** Mithilfe der inversen Matrix  $U^{-1}$ . Es gilt für die **vorherige Verteilung**  $\vec{v}_0$  vor **-1** Stunde, da  $U \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1 \Rightarrow \underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=1} \cdot \vec{v}_0 = U^{-1} \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_0 = U^{-1} \cdot \vec{v}_1$ :

$$U^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 470 \\ 290 \end{pmatrix}}_{\text{Taschenrechner}} = \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix} = \vec{v}_0$$