Mathematik-Abitur in Baden-Württemberg

Zusammenfassung für das allgemeinbildende Gymnasium

Jakob Schmid

Wirtschaftsmathematiker

Youtube-Channel: Fit im Mathe-Abi

Jakob Schmid Consulting

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis **5**
1.1 Ableitung . . . 5
1.1.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von x . . . 5
1.1.2 Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel . . . 5
1.1.3 Ableitung der e-Funktion . . . 6
1.1.4 Spezialfälle . . . 6
1.1.5 Produktregel . . . 6
1.1.6 Kettenregel . . . 7
1.2 Integration (Aufleitung) . . . 7
1.2.1 Aufleitung einer Zahl/Konstanten . . . 7
1.2.2 Aufleitung von Potenzfunktionen (x, $\frac{1}{x^2}$, $\sqrt{x}$, x^2, usw.) und trigonometrischen Funktionen ($\sin(x)$, $\cos(x)$) . . . 8
1.2.3 Aufleitung der e-Funktion und von verketteten Funktionen . . . 8
1.2.4 Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft . . . 9
1.3 Integral . . . 10
1.3.1 Integral berechnen . . . 11
1.3.2 Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen . . . 11
1.3.3 Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen 12
1.3.4 Integral aus einem Schaubild berechnen . . . 13
1.4 Mittelwert einer Funktion . . . 14
1.5 Quadratische Gleichung lösen . . . 15
1.5.1 pq-Formel . . . 15
1.5.2 Mitternachtsformel (abc-Formel) . . . 16
1.6 Lösen von Gleichungen durch Substitution . . . 16
1.7 Satz vom Nullprodukt (Gleichung lösen) . . . 18
1.8 Nullstellen . . . 19
1.9 Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt) . . . 19
1.10 Wendestellen, -punkte . . . 22
1.10.1 Wendepunkt . . . 23
1.11 NEW-Regel . . . 23
1.12 Zusammenhänge der Graphen von F, f, f' und f'' . . . 24
1.12.1 Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen f, f' und f'' . . . 25
1.13 Monotonieverhalten einer Funktion . . . 26
1.14 Krümmungsverhalten einer Funktion . . . 27
1.15 Definitionsbereich . . . 28
1.16 Grenzwert/Limes einer Funktion . . . 28
1.17 Asymptoten . . . 30
1.18 Tangente . . . 32
1.19 Normale . . . 33
1.20 Ganzrationale Funktionen . . . 34
1.20.1 Funktionsgleichung bestimmen . . . 35
1.21 Symmetrie . . . 37

1.22 Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus) 38
1.22.1 Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften 39
1.23 Funktionenschar 40
1.23.1 Ortskurve/-linie 41
1.24 Funktion zeichnen oder skizzieren 42
1.25 ln-Regeln 43
1.26 Potenzregeln 43

2 Geometrie **44**
2.1 LGS - Lineares Gleichungssystem 44
2.1.1 Additionsverfahren 44
2.1.2 Gauß-Verfahren 46
2.2 3D-Koordinatensystem 48
2.3 Vektoren 49
2.3.1 Rechnen mit Vektoren 50
2.3.2 Lineare Abhängigkeit 51
2.3.3 Länge eines Vektors 51
2.3.4 Skalarprodukt 52
2.3.5 Kreuzprodukt 52
2.4 Gerade 53
2.4.1 Geometrische Punktprobe bei Geraden 54
2.4.2 Lage von 2 Geraden 55
2.5 Mittelpunkt einer Strecke 58
2.6 Ebene 59
2.6.1 Parameterform 59
2.6.2 Koordinatenform 60
2.6.3 Normalenform 61
2.6.4 Ebene in Koordinatensystem einzeichnen 62
2.6.5 Lage von 2 Ebenen 63
2.7 Lage von Gerade und Ebene 65
2.8 Abstand 68
2.8.1 Punkt Punkt 68
2.8.2 Punkt Gerade 68
2.8.3 Punkt Ebene 70
2.8.4 Hessesche Normalenform (HNF) 71
2.8.5 Gerade Ebene 71
2.8.6 Ebene Ebene 71
2.8.7 Gerade Gerade 72
2.9 Spiegelungen 72
2.10 Schatten durch punktförmige Lichtquelle oder Strahlen 75
2.11 Winkel 78

3 Stochastik **80**

3.1 Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . 80
3.2 Baumdiagramm . . . 83
3.3 Gegenwahrscheinlichkeit . . . 85
3.4 Erwartungswert . . . 86
3.5 Fakultät $n!$ . . . 88
3.6 Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient . . . 88
3.6.1 Erwartungswert . . . 90
3.6.2 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten . . . 90
3.7 Einseitiger Hypothesentest . . . 92
3.7.1 Fehler 1. Art . . . 95
3.7.2 Signifikanzniveau . . . 98

1 Analysis

1.1 Ableitung

1.1.1 Ableitung einer Zahl/Konstanten und die Ableitung von x

Die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten C ist Null.

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Beispiel. $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
$f(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Die Ableitung von x ist Eins.

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

Beispiel. $f(x) = x + 6 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + 0 = 1$
$f(x) = -x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1 - 0 = -1$

1.1.2 Potenzregel, Faktorregel sowie Summen- und Differenzregel

Potenzregel: Beim Ableiten der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit beliebigem Exponenten (Hochzahl) n von x schreibe den Exponenten (die Hochzahl) mit einem Mal-Zeichen vor das x. Ziehe anschließend „1“ von dem Exponenten (der Hochzahl) ab.

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beispiel. $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$
$f(x) = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3}$

Faktorregel: $u(x)$ sei eine beliebige Funktion (z.B. $u(x) = x$, $u(x) = x^3$, $u(x) = \sin(x)$ oder $u(x) = e^x$ usw.). Steht vor $u(x)$ ein konstanter Faktor (irgendeine Zahl) c, so bleibt dieses c beim Ableiten unverändert erhalten, während $u(x)$ normal abgeleitet wird.

$$f(x) = c \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot u'(x)$$

Beispiel. $f(x) = -2 \cdot x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot (-3 \cdot x^{-3-1}) = 6x^{-4}$
$f(x) = 5 \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$

Summen- und Differenzregel: $u(x)$ und $v(x)$ seien beliebige Funktionen. Steht ein + oder ein − zwischen $u(x)$ und $v(x)$, so werden beim Ableiten die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ jeweils für sich abgeleitet und die Ableitungen anschließend wieder addiert, bzw. subtrahiert.

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x) \text{ und } f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Beispiel. $f(x) = 2x + 4x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 + 8x$
$f(x) = x - 7\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - 7 \cdot (-\sin(x)) = 1 + 7\sin(x)$

1.1.3 Ableitung der e-Funktion

$u(x)$ sei eine beliebige Funktion. Die Ableitung der e-Funktion: $f(x) = e^{u(x)}$ funktioniert so, dass zunächst der ganze Term $e^{u(x)}$ so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend mit der Ableitung von $u(x)$ multipliziert wird.

$$f(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Beispiel.
$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x$$
$$f(x) = e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x}$$
$$f(x) = 4e^{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4e^{x^2+1} \cdot (2x+0) = 8xe^{x^2+1}$$

1.1.4 Spezialfälle

Ist die abzuleitende Funktion ein Bruch, stellt man sie mit folgender Regel erstmal um: $f(x) = \frac{1}{x^n} = 1 \cdot x^{-n}$. Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

Beispiel.
$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3 \cdot 2x^{-3-1} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

Ist die abzuleitende Funktion eine Wurzelfunktion, stellt man diese erstmal nach folgender Regel um: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Anschließend kann ganz normal abgeleitet werden.

Beispiel.
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} = 3x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{x^{2 \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen (**$\sin(x)$**, **$\cos(x)$**) sind:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$$

Die Ableitung der **ln-Funktion** (Logarithmus zur Basis e): $f(x) = \ln(x)$ ist:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

1.1.5 Produktregel

Produktregel: $u(x)$ und $v(x)$ seien beliebige Funktionen. Steht ein Mal-Zeichen zwischen $u(x)$ und $v(x)$, so wird beim Ableiten zunächst $u(x)$ abgeleitet und mit $v(x)$ multipliziert und dazu addiert wird $u(x)$ multipliziert mit der Ableitung von $v(x)$.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel.
$$f(x) = 3x \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot \cos(x) + 3x \cdot (-\sin(x))$$
$$f(x) = x^4 \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 \cdot e^{2x} + x^4 \cdot 2e^{2x} = x^3e^{2x}(4+2x)$$

1.1.6 Kettenregel

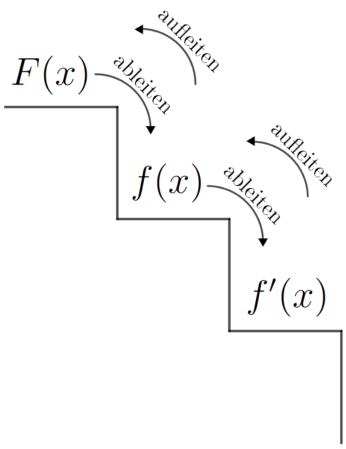
Kettenregel: Sind zwei beliebige Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ miteinander verkettet: $u(v(x))$ (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Ableiten zunächst die „äußere " Funktion $u(\,)$ abgeleitet und anschließend mit der Ableitung der „inneren" Funktion $v(x)$ multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beispiel. 1. Art der äußeren Funktion $u(\,)$ als $(v(x))^n$ mit Hochzahl/Exponent n:
$f(x) = (4x^2+3)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\cdot(4x^2+3)^{3-1}\cdot(2\cdot 4x^{2-1}+0) = 3(4x^2+3)^2\cdot 8x = 24(4x^2+3)^2 x$
$f(x) = \dfrac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2\cdot 5(x-9)^{-2-1}\cdot(1-0) = -10(x-9)^{-3}$

Beispiel. 2. Art der äußeren Funktion $u(\,)$ als $\sin(v(x))$ oder $\cos(v(x))$:
$f(x) = \sin(x^3+1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x^3+1)\cdot(3x^{3-1}+0) = 3\cos(x^3+1)x^2$
$f(x) = 2\cos(x^4) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2(-\sin(x^4))\cdot 4x^{4-1} = 8(-\sin(x^4))x^3$

1.2 Integration (Aufleitung)



Das Ab- und Aufleiten von Funktionen kann man mit Treppensteigen vergleichen. Die Funktion $f(x)$, die es ab- bzw. aufzuleiten gilt, ist die Treppenstufe auf der wir „momentan" stehen. Leiten wir diese Funktion $f(x)$ nun einmal ab, erhalten wir die Ableitung $f'(x)$. Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe hinabgestiegen. Wollen wir nun wieder eine Stufe zurück nach oben auf die „Treppenstufe" von $f(x)$ steigen, müssen wir $f'(x)$ aufleiten. Leiten wir also $f'(x)$ einmal auf, erhalten wir wieder die Funktion $f(x)$ und befinden uns wieder auf der ursprünglichen Treppenstufe von $f(x)$. Leiten wir die Funktion $f(x)$ ein weiteres Mal auf, erhalten wir die Aufleitung $F(x)$. Man nennt $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$. Auf unserer Treppe sind wir nun eine Stufe nach oben gestiegen. Leiten wir nun die Stammfunktion $F(x)$ einmal ab, erhalten wir wieder die Funktion $f(x)$ und bewegen uns auf unserer Treppe wieder eine Stufe nach unten.

Merke: Wenn ihr eine Funktion $f(x)$ aufleitet, könnt ihr jedes Mal danach **kontrollieren**, ob eure Aufleitung $F(x)$ korrekt ist, indem ihr diese Aufleitung $F(x)$ wieder ableitet. Denn es muss dabei wieder die ursprüngliche Funktion $f(x)$ herauskommen (Denkt an die Treppe!), ansonsten ist eure Aufleitung **nicht korrekt!**

1.2.1 Aufleitung einer Zahl/Konstanten

Die Aufleitung einer beliebigen Zahl/Konstanten C ist die Zahl/Konstante C multipliziert mit x.

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad F(x) = C\cdot x$$

Beispiel. $f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 1 \cdot x = x$ **Kontrolle:** $F'(x) = 1$ ✓
$f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 5x$ **Kontrolle:** $F'(x) = 5$ ✓

1.2.2 Aufleitung von Potenzfunktionen (x, $\frac{1}{x^2}$, $\sqrt{x}$, x^2, usw.) und trigonometrischen Funktionen ($\sin(x)$, $\cos(x)$)

Beim Aufleiten von Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit beliebigem Exponenten (Hochzahl) n von x addiere als Erstes den Exponenten (die Hochzahl) n mit „+1“. Als Zweites wird der Term x^{n+1} multipliziert mit: 1 geteilt durch $n + 1$ (als Bruch geschrieben).

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

Beispiel.

$$f(x) = x = x^1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} = \frac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{4}{2+1} \cdot x^{2+1} = \frac{4}{3}x^3$$

$$f(x) = \frac{6}{x^3} = 6x^{-3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{6}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = \frac{6}{-2}x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$$

$$f(x) = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{3}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x^3}$$

Die Aufleitungen der trigonometrischen Funktionen ($\boldsymbol{\sin(x)}$, $\boldsymbol{\cos(x)}$) sind:

$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x)$ **Kontrolle:** $F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$ ✓
$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(x)$ **Kontrolle:** $F'(x) = \cos(x)$ ✓

1.2.3 Aufleitung der e-Funktion und von verketteten Funktionen

$u(x)$ sei eine beliebige lineare Funktion. Die Aufleitung der e-Funktion: $f(x) = e^{u(x)}$ funktioniert so, dass zunächst der ganze Term $e^{u(x)}$ so wie er ist, eins zu eins übernommen wird und anschließend multipliziert wird mit: 1 geteilt durch die Ableitung von $u(x)$.

$$f(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^{u(x)} \cdot \frac{1}{u'(x)}$$

Beispiel.

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x \cdot \frac{1}{1} = e^x$$

$$f(x) = e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^{-3x} \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Sind zwei beliebige Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ miteinander verkettet: $u(v(x))$ (d.h. sie sind ineinander verschachtelt), so wird beim Aufleiten zunächst die „äußere“ Funktion $u(\,)$ aufgeleitet (zu $U(x)$) und anschließend mit: 1 geteilt durch die Ableitung der „inneren“ Funktion $v(x)$ multipliziert.

$$f(x) = u(v(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = U(v(x)) \cdot \frac{1}{v'(x)}$$

Beispiel. 1. Art der äußeren Funktion $u(\ )$ als $(v(x))^n$ mit Hochzahl/Exponent n:

$$f(x) = (2x+1)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3+1} \cdot (2x+1)^{3+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+1)^4 = \frac{1}{8}(2x+1)^4$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-9)^2} = 5(x-9)^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{-2+1} \cdot (x-9)^{-2+1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{-1} \cdot (x-9)^{-1} = \frac{-5}{(x-9)}$$

Beispiel. 2. Art der äußeren Funktion $u(\ )$ als $\sin(v(x))$ oder $\cos(v(x))$:

$$f(x) = \sin(3x+1) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(3x+1) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)$$

$$f(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\sin(\frac{1}{2}x) \cdot 2 = 4\sin(\frac{1}{2}x)$$

1.2.4 Stammfunktion, die durch einen bestimmten Punkt verläuft

Leitet man eine Funktion $f(x)$ auf, so erhält man die sogenannte **Stammfunktion $F(x)$** von $f(x)$. Das Besondere ist, dass jede Funktion $f(x)$ unendlich viele Stammfunktionen besitzt, aber nur eine Ableitung hat.
Denken wir noch einmal an unsere Treppe: Beim Aufleiten einer Funktion $f(x)$ haben wir immer die Möglichkeit zu kontrollieren, ob unsere Aufleitung $F(x)$ korrekt ist, indem wir $F(x)$ ableiten und dann schauen, ob dasselbe wie $f(x)$ rauskommt. Da die Ableitung einer beliebigen Zahl/Konstanten C Null ist, können wir an die Aufleitung $F(x)$ ein beliebiges C dazuaddieren und erhalten beim Ableiten wieder $f(x)$, egal welche Zahl wir für C einsetzen.

$$F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \textbf{Ableiten ergibt: } F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x) \checkmark$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ mit der „allgemeinen“ Aufleitung $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ und setzen für C verschiedene Zahlen ein und leiten ab, um zu schauen ob wir wieder $f(x) = x^2$ erhalten:

$$C = 7\ :\ F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

$$C = -3:\ F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 0 = x^2 = f(x) \checkmark$$

Ist nun die Aufgabenstellung, dass eine Funktion $f(x)$ gegeben ist und man diejenige Stammfunktion $F(x)$ bestimmen soll, die durch einen **bestimmten** Punkt (z.B. $F(3) = 8 \Rightarrow P(3|8)$) verläuft. Dann geht es genau darum dieses C so zu bestimmen, dass $F(x)$ durch diesen Punkt verläuft.

Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$. Bestimme diejenige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ mit $F(1) = 4$:

1. Bestimme allgemeine Aufleitung: zunächst vereinfache $f(x) = \frac{8}{(2x-1)^3} = 8(2x-1)^{-3}$

$\Rightarrow F(x) = 8 \cdot \frac{1}{-3+1} \cdot (2x-1)^{-3+1} \cdot \frac{1}{2} + C = 8 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{2}(2x-1)^{-2} + C = \frac{-2}{(2x-1)^2} + C$

2. Bestimme C so, dass $F(1) = 4$ ist:

$$F(1) = \frac{-2}{(2 \cdot 1 - 1)^2} + C = \frac{-2}{(1)^2} + C = -2 + C \;\Rightarrow\; F(1) = 4 \Rightarrow -2 + C = 4 \Rightarrow C = 6$$

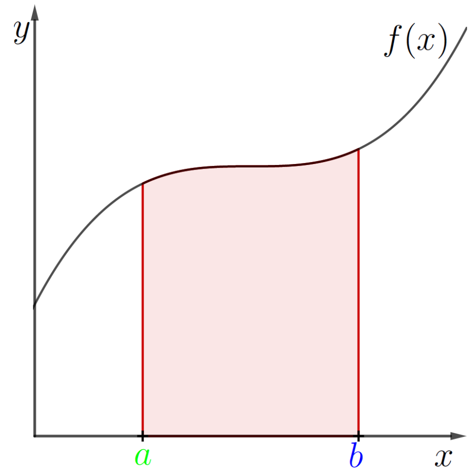
3. Schreibe die Stammfunktion $F(x)$ mit $C = 6$ hin:

Die gesuchte Stammfunktion lautet: $F(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} + 6.$

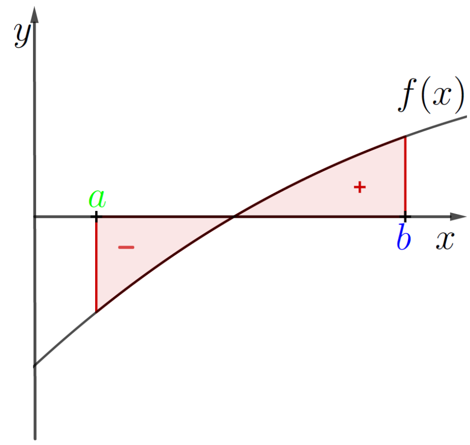
1.3 Integral

Das Integral einer Funktion $f(x)$ beschreibt „häufig" den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse, mit a als sogenannte „untere" Grenze und b als „obere" Grenze **auf der x-Achse**. Die Schreibweise für das Integral einer Funktion $f(x)$ mit der unteren Grenze a und der oberen Grenze b ist wie folgt:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



Verläuft die Fläche, die das Integral beschreibt, unterhalb der x-Achse, so nimmt das Integral einen **negativen** Wert an. Verläuft sie oberhalb der x-Achse, nimmt das Integral einen **positiven** Wert an.
Sind die untere Grenze a und die obere Grenze b nun so gesetzt, dass bei unserem Integral ein Teil der Fläche unterhalb und ein Teil oberhalb der x-Achse verläuft, so wird die „negative" Fläche von der „positiven" Fläche abgezogen und das Ergebnis ist das gesamte Integral von a bis b.



1.3.1 Integral berechnen

Das Integral einer Funktion $f(x)$ wird folgendermaßen berechnet. Zunächst leitet man die Funktion $f(x)$ auf und erhält $F(x)$. In dieses $F(x)$ setzt man einmal die obere Grenze b für x ein **Minus** die untere Grenze a eingesetzt in $F(x)$. Rechnerische Schreibweise ist:

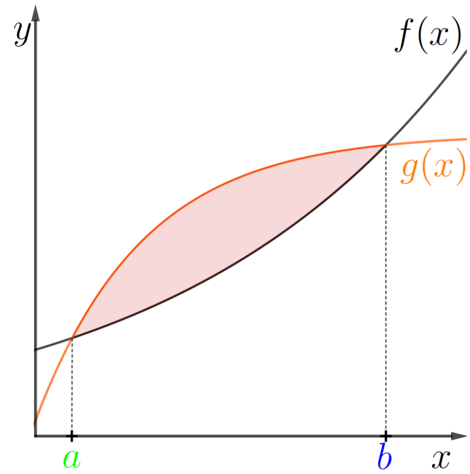
$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel. Bestimme das Integral $\int_{-2}^{4} x^2 - 2 \ \ \mathrm{dx}$

$$\int_{-2}^{4} x^2 - 2\ dx = \left[\frac{1}{2+1}x^{2+1} - 2x\right]_{-2}^{4} = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_{-2}^{4} = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 64 - 8 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-8) - (-4)\right) = \frac{64}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 4 = \frac{72}{3} - 12 = 24 - 12 = 12$$

1.3.2 Fläche, die von 2 Funktionen eingeschlossen wird, berechnen

Eine Aufgabenstellung ist, die Fläche, welche von den beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird, zu berechnen. Die Integralrechnung liefert uns die Lösung. Wenn wir nämlich das Integral von $g(x)$ mit a als untere und b als obere Grenze **Minus** das Integral von $f(x)$ auch mit a als untere und b als obere Grenze rechnen, erhalten wir exakt die gesuchte Fläche:



$$\text{Fläche} = \int_a^b g(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x) - f(x)\ dx$$

Um die Integrale berechnen zu können, müssen zuerst die untere und obere Grenze (a und b) berechnet werden. Diese erhält man, durch die Berechnung der **Schnittpunkte** von $f(x)$ und $g(x)$, indem man $f(x)$ mit $g(x)$ gleichsetzt und nach x auflöst.

Beispiel. : Bestimme den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen $f(x) = 6x$ und $g(x) = 3x^2$ eingeschlossen wird.

1. Berechne die Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$: setze $f(x) = g(x)$

$6x = 3x^2 \quad |:x \qquad \Rightarrow$ erster Schnittpunkt bei $x_1 = 0$
$6 \ \ = 3x \quad |:3$
$x \ \ = 2 \qquad\qquad \Rightarrow$ zweiter Schnittpunkt bei $x_2 = 2$

2. Berechne die Fläche mit Hilfe der beiden Integrale von $f(x)$ und $g(x)$ mit 0 als untere und 2 als obere Grenze:

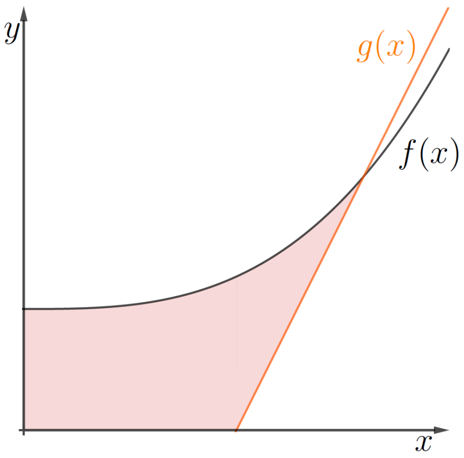
$$\int_0^2 6x\ dx - \int_0^2 3x^2\ dx = \int_0^2 6x - 3x^2\ dx = \left[6 \cdot \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 3 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1}\right]_0^2 = \left[\frac{6}{2}x^2 - \frac{3}{3}x^3\right]_0^2$$

$$= \left[3x^2 - x^3\right]_0^2 = 3 \cdot 2^2 - 2^3 - \left(3 \cdot 0^2 - 0^3\right) = 3 \cdot 4 - 8 - \left(0 - 0\right) = 12 - 8 = 4$$

Hinweis: Man hätte auch $f(x)$ mit $g(x)$ vertauschen können (Also das Integral von $g(x)$ Minus das Integral von $f(x)$ rechnen können), dann wäre nicht 4 sondern -4 bei der Rechnung oben herausgekommen. Da eine Fläche allerdings nicht negativ sein kann nutzt man die Betragsstriche || um die Lösung dann „positiv" zu machen, also: $|-4| = 4$.

1.3.3 Fläche, die von mehreren Graphen eingeschlossen wird, berechnen

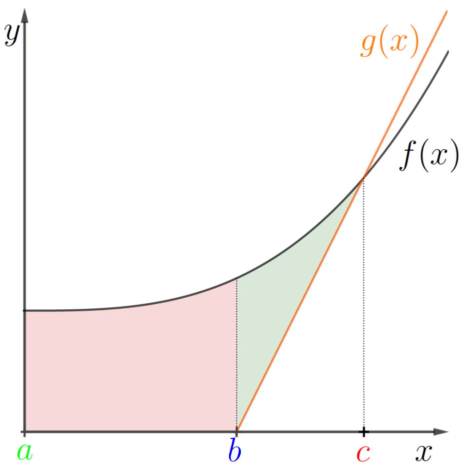
Eine Aufgabenstellung ist, die Fläche, welche von mehreren Graphen eingeschlossen wird, zu berechnen. Im Beispiel rechts ist es die Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und den beiden Funktionen $f(x)$ sowie $g(x)$ eingeschlossen wird.



Um diese Fläche zu berechnen, muss man sie in zwei Teile zerlegen, nämlich in die rote Fläche und die grüne Fläche (siehe untere Abbildung). Diese beiden Flächen lassen sich wiederum mit der Integralrechnung berechnen, denn die rote Fläche ist das Integral von $f(x)$ mit a als untere und b als obere Grenze. Die grüne Fläche wiederum ist die Fläche, die im Bereich von b bis c durch die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird:

Gesuchte eingeschlossene Fläche = Fläche + Fläche

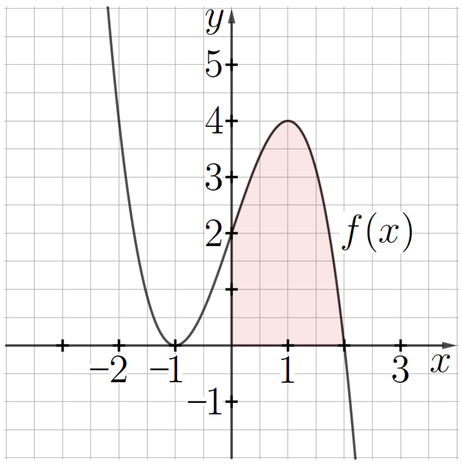
$$= \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x) - g(x)\ dx$$



Um diese Integrale berechnen zu können, müssen noch die jeweiligen Integralgrenzen a, b und c bestimmt werden. $a = 0$ da die y-Achse die „linke" Seite der Fläche begrenzt, b berechnet sich durch den Schnittpunkt von $g(x)$ mit der x-Achse und c wird mit dem Schnittpunkt von $f(x)$ mit $g(x)$ berechnet.
Fazit: Unterteile die gesuchte Fläche geschickt, sodass man mit geeigneten Integralgrenzen die gesuchte Fläche berechnen kann.

1.3.4 Integral aus einem Schaubild berechnen

Ist die Aufgabe das Integral einer Funktion aus einem Schaubild abzulesen, so bestimmt man den Inhalt der Fläche, die das Integral beschreibt, durch händisches Kästchenzählen. Hat man die Anzahl der Kästchen erfasst, die auf der gesuchten Fläche vorhanden sind, so muss man die Skalierung der Achsen betrachten und damit den Flächeninhalt eines Kästchens bestimmen (Länge MAL Breite). Anschließend multipliziert man die Anzahl der Kästchen mit dem Flächeninhalts eines Kästchens und hat damit das gesuchte Integral bestimmt.



Beispiel. : Bestimme aus dem oberen Schaubild das Integral $I = \int_0^2 f(x)\ dx$

Es handelt sich bei dem Integral um die rot markierte Fläche. Kästchenzählen ergibt, dass die Fläche ca. 24 Kästchen beinhaltet. Auf der x-Achse hat ein Kästchen die Einheit/Länge $0,5$ und auf der y-Achse dieselbe. Somit beträgt der Flächeninhalt von einem Kästchen: Länge MAL Breite $= 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = \frac{1}{4}$. Somit ist die gesamte Fläche, also das Integral:

$$I = \int_0^2 f(x)\ dx = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

Eine weitere mögliche Aufgabenstellung mit diesem oberen Schaubild ist, folgenden Term, bestehend aus der Stammfunktion $F(x)$ von der im Schaubild gegebenen Funktion $f(x)$, zu bestimmen:

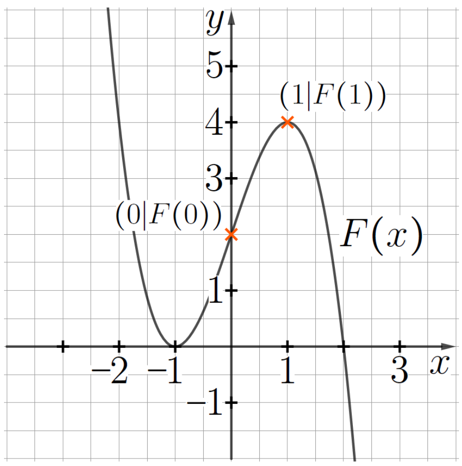
$F(2) - F(0)$?

Die Lösung führt über die Überlegung, dass dieser Term ja das Integral von $f(x)$ mit 0 als untere und 2 als obere Grenze ist. Und die Lösung für dieses Integral bestimmen wir nach demselben „Kästchenzähl-Schema“ wie in der oberen Aufgabenstellung:

$$\int_0^2 f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_0^2 = \boldsymbol{F(2) - F(0)} = 24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

Hinweis: Wichtig ist also darauf zu achten, nach welcher Funktion in der Aufgabenstellung gefragt ist (z.B. Stammfunktion $F(x)$, „normale“ Funktion $f(x)$ oder Ableitung $f'(x)$) und welche Funktion im Schaubild tatsächlich gegeben ist.

Ist im Schaubild die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ gegeben und das Integral $I = \int_0^1 f(x)\ dx$ der Funktion $f(x)$ ist gesucht, so liest man aus dem Schaubild von $F(x)$ bei der unteren und oberen Grenze des Integrals (in dem Fall $x = 0$ und $x = 1$) die y-Werte ab (also $F(0) = 2$ und $F(1) = 4$) und berechnet das gesuchte Integral:



$$I = \int_0^1 f(x)\ dx = \Big[F(x)\Big]_0^1 = F(1) - F(0) = 4 - 2 = 2$$

1.4 Mittelwert einer Funktion

Den Mittelwert M, den eine Funktion $f(x)$ in einem bestimmten Bereich/Intervall $I = [a, b]$ annimmt, berechnet man mit folgender Formel:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\ dx$$

Beispiel. : Die Funktion $f(t) = 36 + e^{0,1t}$ beschreibt den typischen Körpertemperaturverlauf einer Fieberkurve in den ersten 10 Stunden eines erkrankten Erwachsenen in $°C$. Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach der Erkrankung. Wie hoch ist die **mittlere** Körpertemperatur in den ersten 10 Stunden?

Gesucht ist der Mittelwert von $f(t)$ im Zeitraum der ersten 10 Stunden, somit im Intervall $I = [0, 10]$:

$$M_f = \frac{1}{10-0} \cdot \int_0^{10} 36 + e^{0,1t}\ dt = \frac{1}{10} \cdot \Big[36t + 10e^{0,1t}\Big]_0^{10} = \frac{1}{10} \cdot (36 \cdot 10 + 10e^{0,1 \cdot 10} - (36 \cdot 0 + 10e^{0,1 \cdot 0}))$$
$\approx 37,72\,°C$ beträgt die mittlere Temperatur in den ersten 10 Stunden

Eine weitere Frage mit derselben Aufgabenstellung könnte sein: Wie hoch ist die **mittlere** Änderungsrate der Körpertemperatur in den ersten 8 Stunden?

Das Keyword „Änderungsrate“ ist IMMER ein Synonym für die Ableitung (in dem Fall $f'(t)$). Somit ist der Mittelwert von $f'(t)$ im Zeitraum der ersten 8 Stunden, somit im Intervall $I = [0, 8]$, gesucht:

$$M_{f'} = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 f'(t)\ dt = \frac{1}{8} \cdot \int_0^8 0,1e^{0,1t}\ dt = \frac{1}{8} \cdot \Big[e^{0,1t}\Big]_0^8 = \frac{1}{8} \cdot (e^{0,1 \cdot 8} - e^{0,1 \cdot 0})$$
$\approx 0,15\,°C$ pro Stunde ist die mittlere Änderungsrate in den ersten 8 Stunden

1.5 Quadratische Gleichung lösen

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die als höchsten Exponenten (Hochzahl) die 2 besitzt. Deshalb heißt sie „quadratisch". Es gibt zwei Möglichkeiten für eine quadratische Gleichung. 1. Möglichkeit ist, dass x nur die 2 als Exponenten (Hochzahl) besitzt. a und b seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 = b$$

Beispiel.
$$\begin{aligned} 3x^2 &= 12 && \mid :3 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x &= \pm\, 2 && \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit ist, dass in der quadratischen Gleichung x mit dem Exponenten (Hochzahl) 2 (also x^2) vertreten ist und ein einfaches x (mit dem Exponenten (Hochzahl) 1). a, b und c seien beliebige Zahlen, dann ist eine allgemeine Form (Man kann die quadratische Gleichung durch umstellen IMMER auf diese Form bringen!):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es folgen nun zwei Verfahren, mit denen man diese Gleichung nach x auflösen kann. Die pq-Formel und die Mitternachtsformel (abc-Formel).

1.5.1 pq-Formel

Um die pq-Formel anwenden zu können, muss man zunächst die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch a teilen um die „**pq-Form**" zu erhalten:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 && \mid :a \\ \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \frac{0}{a} && \Rightarrow \frac{b}{a} = p \text{ und } \frac{c}{a} = q \\ \boldsymbol{x^2 + px + q} &\boldsymbol{= 0} \end{aligned}$$

Haben wir die Gleichung nun in die „pq-Form" gebracht und somit p und q herausgefunden, müssen wir nun noch p und q in die pq-Formel einsetzen und die Lösung(en) von x berechnen:

$$\textbf{Lösung:}\ x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir erhalten also maximal 2 Lösungen für x. Die Lösung x_1 erhalten wir, indem wir nach dem Bruch $-\frac{p}{2}$ + ... rechnen und die Lösung x_2 erhalten wir, indem wir nach dem Bruch $-\frac{p}{2}$ − ... rechnen. Nur eine Lösung für x existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{0}$. Dann ist die einzige Lösung der Term $-\frac{p}{2}$. Gar keine Lösung für x erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

Beispiel. $2x^2 + 3x \ -2 \ = 0 \quad | : 2$

$$\frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{2}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \ = 0 \quad \Rightarrow \frac{3}{2} = p \text{ und } -1 = q$$

Lösung: $x_{1,2} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - (-1)} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}}$

$= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $\boldsymbol{x_2} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$

1.5.2 Mitternachtsformel (abc-Formel)

Um die Mitternachtsformel anwenden zu können, braucht man die quadratische Gleichung in der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nun müssen wir noch a, b und c in die Mitternachtsformel (abc-Formel) einsetzen und die Lösung(en) von x berechnen:

$$\textbf{Lösung: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In der Regel erhalten wir also 2 Lösungen für x. Die Lösung x_1 erhalten wir, indem wir im Zähler nach $-b$ + ... rechnen und die Lösung x_2 erhalten wir, indem wir im Zähler nach $-b$ − ... rechnen. Nur eine Lösung für x existiert genau dann, wenn unter der Wurzel eine Null rauskommt $\frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$. Dann ist die einzige Lösung der Term $\frac{-b}{2a}$. Gar keine Lösung für x erhält man, wenn unter der Wurzel eine negative Zahl rauskommt.

Beispiel. $\frac{3}{x} \ - \frac{2}{x^2} \quad = -2 \quad | \cdot x^2$

$$\frac{3x^2}{x} - \frac{2x^2}{x^2} \quad = -2x^2 \ | +2x^2$$

$$2x^2 \ + 3x - 2 \ = 0$$

Lösung: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ und $\boldsymbol{x_2} = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$

1.6 Lösen von Gleichungen durch Substitution

a, b und c seien beliebige Zahlen. Substituieren bedeutet soviel wie etwas ersetzen, austauschen. Bei bestimmten Gleichungen (z.B. $ae^{2x} + be^x + c = 0$) geht es genau darum, einen Term (hier: e^x) zunächst durch einen anderen Term (z.B. u) zu ersetzen/substituieren, womit die Gleichung für uns lösbar wird (man schreibt: Substitution: $e^x = u$). In der Regel geht es immer darum, die Gleichung durch die Substitution in eine quadratische Form zu bringen ($au^2 + bu + c = 0$), damit die pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel) angewendet werden kann. Nachdem die quadratische Gleichung nach dem neuen Term (u) gelöst ist, werden nun die Lösungen für u in die Substitutionsgleichung $e^x = u$ eingesetzt und nach x aufgelöst (Man nennt dies Resubstitution/Rücksubstitution).

Beispiel. Lösen Sie die Gleichung $-e^{2x} + 5e^x - 4 = 0$.

1. Substitution: $e^x = u$

2. u für e^x in die Gleichung einsetzen: $-u^2 + 5u - 4 = 0$

3. Gleichung nach u mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

Lösung: $u_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 3}{-2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_1} = \dfrac{-5+3}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ und $\boldsymbol{u_2} = \dfrac{-5-3}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4$

4. Resubstitution: $e^x = u_1$ und $e^x = u_2$, also $e^x = 1$ und $e^x = 4$

$e^x = 1$	$\mid \ln()$	$e^x = 4$	$\mid \ln()$
$\ln(e^x) = \ln(1)$		$\ln(e^x) = \ln(4)$	
$x_1 = 0$		$x_2 = \ln(4)$	

Beispiel. Lösen Sie die Gleichung $\dfrac{2}{x^2} + x^2 = 3$.

1. x aus dem Bruch bekommen und anschließend die Gleichung geeignet umstellen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2} + x^2 &= 3 && \mid \cdot x^2 \\ \frac{2 \cdot x^2}{x^2} + x^2 \cdot x^2 &= 3x^2 && \mid -3x^2 \\ x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Substitution: $x^2 = u$

3. u für x^2 in die Gleichung einsetzen: $u^2 - 3u + 2 = 0$

4. Gleichung nach u mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:

Lösung: $u_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_1} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ und $\boldsymbol{u_2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

5. Resubstitution: $x^2 = u_1$ und $x^2 = u_2$, also $x^2 = 2$ und $x^2 = 1$

$x^2 = 2$	$\mid \sqrt{}$	$x^2 = 1$	$\mid \sqrt{}$
$x = \pm\sqrt{2}$		$x = \pm\sqrt{1}$	
$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$		$\Rightarrow x_3 = 1,\ x_4 = -1$	

1.7 Satz vom Nullprodukt (Gleichung lösen)

$u(x)$ und $v(x)$ seien beliebige Funktionen (z.B. $u(x) = x$, $v(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ oder $u(x) = x^2 - 1$, $v(x) = 2 - e^x$ usw.). Der Satz vom Nullprodukt besagt: Das Produkt zweier Funktionen (Terme) ist 0 (also $u(x) \cdot v(x) = 0$), wenn **mindestens** eine der beiden Funktionen (Terme) ($u(x)$, $v(x)$) 0 ist ($u(x) = 0$ und/oder $v(x) = 0$). Logisch, denn 0 MAL irgendetwas, z.B. 0 MAL irgendeinen beliebigen Term (Funktion), oder auch 0 MAL eine beliebige Zahl, ergibt immer 0.

Ist die Aufgabenstellung eine Gleichung der Form $u(x) \cdot v(x) = 0$ zu lösen, betrachtet man also jede Funktion (Term) für sich und setzt diese gleich 0 ($u(x) = 0$ und $v(x) = 0$). Jeweiliges Auflösen nach der Variablen x liefert nach dem Satz vom Nullprodukt die gesuchten Lösungen der Gleichung $u(x) \cdot v(x) = 0$.

$$\underbrace{u(x)}_{=0} \cdot \underbrace{v(x)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x) = 0 \text{ und } v(x) = 0 \text{ berechnen}$$

Beispiel. Lösen Sie die Gleichung $(x^2 - 3) \cdot (2 - e^x - \frac{1}{e^x}) = 0$.

1. Setze linke und rechte Seite vom Produkt gleich 0: $(\underbrace{x^2 - 3}_{=0}) \cdot (\underbrace{2 - e^x - \frac{1}{e^x}}_{=0}) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= 0 \quad | +3 \\ x^2 &= 3 \quad | \sqrt{\ } \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2 - e^x - \frac{1}{e^x} &= 0 \quad | \cdot e^x \\ 2e^x - e^{2x} - \frac{e^x}{e^x} &= 0 \\ -e^{2x} + 2e^x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x_1 = \sqrt{3}}$ und $\boldsymbol{x_2 = -\sqrt{3}}$. Bei 2. Gleichung Substitution: $e^x = u$

3. u für e^x in die Gleichung ($-e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$) einsetzen: $-u^2 + 2u - 1 = 0$

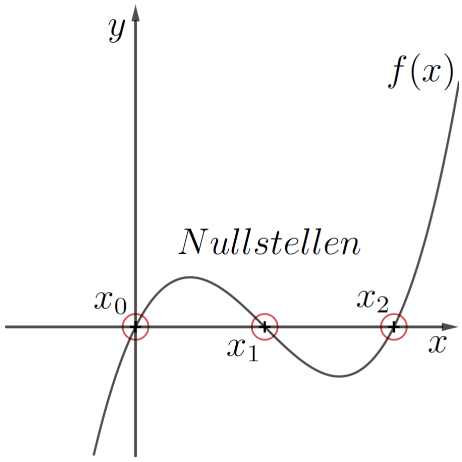
4. Gleichung nach u mit der pq-Formel oder Mitternachtsformel/abc-Formel lösen:
Lösung: $u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$
$\Rightarrow \boldsymbol{u_1} = 1$

5. Resubstitution: $e^x = u_1$, also $e^x = 1$
$e^x = 1 \mid \ln(\,)$
$\ln(e^x) = \ln 1$
$x \cdot \ln(e) = 0$
$x \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_3 = 0}$

1.8 Nullstellen

Die Nullstellen einer Funktion $f(x)$ sind genau die x-Werte, an denen die Funktion $f(x)$ die x-Achse schneidet oder berührt. Sie lassen sich berechnen, indem die Funktion $f(x)$ gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach x aufgelöst wird. Diese Lösungen für x sind die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

$f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Die Lösungen x_0, x_1, x_2, ...
sind die Nullstellen von $f(x)$



Beispiel. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
1. Setze $f(x) = 0$: $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

2. Löse die Gleichung nach x auf:
$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad |\ x$ ausklammern
$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad | : x \quad \Rightarrow \boldsymbol{x_0} = 0$ (**Satz vom Nullprodukt** $\Rightarrow$ 1. Nullstelle von $f(x)$)
$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow$ pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)

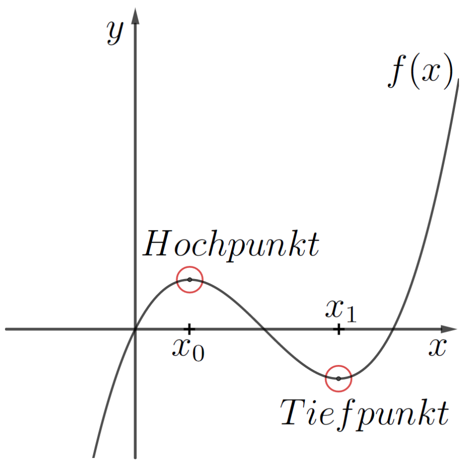
Lösung: $x_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ und $\boldsymbol{x_2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ (2. und 3. Nullstelle von $f(x)$)

1.9 Extremstellen, -punkte (Hoch-, Tief- und Sattelpunkt)

Die Extremstellen einer Funktion $f(x)$ sind genau die x-Werte, an denen die Funktion $f(x)$ weder „steigt“ noch „fällt“, d.h. die Steigung beträgt an diesen Stellen **Null**. Da die **Ableitung** einer Funktion ($f'(x)$) die **Steigung** der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x angibt (**$f'(x)$ = Steigung von $f(x)$**), lassen sich diese Extremstellen berechnen, indem die Ableitung der Funktion (also $f'(x)$) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach x aufgelöst wird. Diese Lösungen für x sind die Extremstellen der Funktion $f(x)$.

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Die Lösungen x_0, x_1, x_2, ...
sind die Extremstellen von $f(x)$



Die Extremstellen geben entweder einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt an.

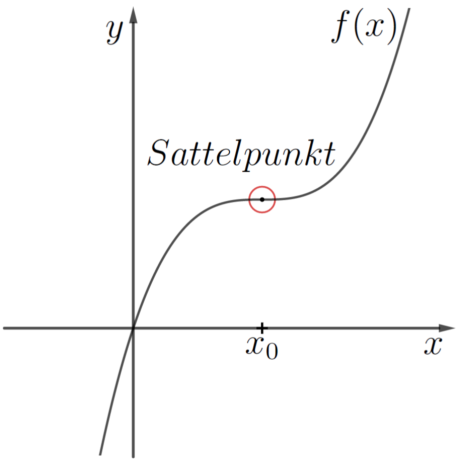
Hochpunkt: Das charakteristische für einen Hochpunkt ist, dass die Funktion $f(x)$ vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann „fällt“. An einer (durch $f'(x) = 0$ berechneten) Extremstelle x_0 liegt genau dann ein Hochpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von $f(x)$ eine **negative** Zahl ergibt.

$$\begin{aligned}&\text{Wenn } f''(x_0) < 0\\ &\Rightarrow f(x) \text{ hat an der Extremstelle } x_0 \text{ einen Hochpunkt}\end{aligned}$$

Tiefpunkt: Das charakteristische für einen Tiefpunkt ist, dass die Funktion $f(x)$ vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann „ansteigt“. An einer (durch $f'(x) = 0$ berechneten) Extremstelle x_0 liegt genau dann ein Tiefpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von $f(x)$ eine **positive** Zahl ergibt.

$$\begin{aligned}&\text{Wenn } f''(x_0) > 0\\ &\Rightarrow f(x) \text{ hat an der Extremstelle } x_0 \text{ einen Tiefpunkt}\end{aligned}$$

Sattelpunkt: Das charakteristische für einen Sattelpunkt ist, dass die Funktion $f(x)$ entweder vor dem Punkt „ansteigt“ und nach ihm dann weiter „ansteigt“ oder vor dem Punkt „fällt“ und nach ihm dann weiter „fällt“. An einer (durch $f'(x) = 0$ berechneten) Extremstelle x_0 liegt ein Sattelpunkt vor, wenn die Extremstelle eingesetzt in die 2. Ableitung von $f(x)$ Null ergibt und die Extremstelle eingesetzt in die 3. Ableitung ungleich Null ergibt:



$$\begin{aligned}&\text{Wenn } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0\\ &\Rightarrow f(x) \text{ hat an der Extremstelle } x_0 \text{ einen Sattelpunkt}\end{aligned}$$

Hinweis: Ist die Aufgabenstellung die Extrem**punkte** einer Funktion $f(x)$ zu berechnen (Gesucht ist der zugehörige x- und y-Wert der Extremstelle: $E(x|y)$), so müssen neben den Extremstellen (x_0, x_1,...) auch die zugehörigen Extremwerte (y_0, y_1,...) bestimmt werden. Diese erhält man, indem man die Extremstellen (x_0, x_1,...) in die Funktion $f(x)$ einsetzt, also: $(f(x_0), f(x_1),...) = (y_0, y_1,...)$.

$$\text{Extrempunkt (Extremstelle|Extremwert)} = E(x_0|f(x_0)) = E(x_0|y_0)$$

Beispiel. Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$:

$$f'(x) = \frac{3}{3}x^{3-1} - \frac{3\cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

$$f''(x) = 2x^{2-1} - 3 = 2x - 3$$

$f'''(x) = 2 - 0 = 2$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen: Also $f'(x) = 0$

$f'(x) \quad\quad = 0$
$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow$ pq-Formel oder Mitternachtsformel (abc-Formel)

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ und $\boldsymbol{x_2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ (1. und 2. Extremstelle von $f(x)$)

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = \quad 1 > 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt (von $f(x)$ an der Extremstelle $x_0 = 2$)
$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt (von $f(x)$ an der Extremstelle $x_1 = 1$)

4. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 = \frac{8}{3} - 6 + 4 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow f(x)$ hat den Tiefpunkt T $\left(2 \middle| \frac{2}{3}\right)$.

$$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{12}{6} = \frac{2-9+12}{6} = \frac{5}{6}$$

$\Rightarrow f(x)$ hat den Hochpunkt H $\left(1 \middle| \frac{5}{6}\right)$.

Beispiel. Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion $g(x) = (x-1)^3 + 1$.

1. Berechne die 1., die 2. und die 3. Ableitung der Funktion $g(x) = (x-1)^3 + 1$:

$g'(x) \;= 3(x-1)^{3-1} \cdot 1 = 3(x-1)^2$
$g''(x) = 6(x-1)^{2-1} \cdot 1 = 6(x-1) = 6x - 6$
$g'''(x) = 6 - 0 = 6$

2. Die 1. Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen: Also $g'(x) = 0$

$g'(x) \quad\quad = 0$
$3(x-1)^2 = 0 \quad\quad | :3$

$$\frac{3(x-1)^2}{3} = \frac{0}{3}$$

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 0 \quad \mid \sqrt{} \\ x-1 &= \pm\sqrt{0} \quad \mid +1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_0} = 1$ (1. Extremstelle von $g(x)$)

3. Mit der 2. Ableitung bestimmen, ob ein Hoch-, Tief- oder möglicherweise ein Sattelpunkt vorliegt:

$g''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow$ eventuell liegt ein Sattelpunkt vor

4. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Sattelpunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 1. Ableitung argumentieren, welcher Extrempunkt vorliegt $\Rightarrow$ siehe Monotonieverhalten einer Funktion)

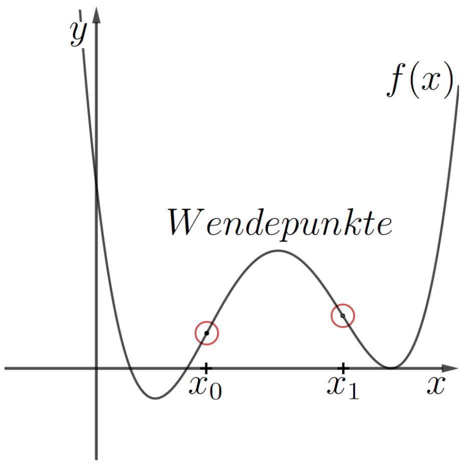
$g'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt (von $g(x)$ an der Extremstelle $x_0 = 1$)

5. Die Extremstellen in die zugehörige ursprüngliche Funktion $g(x)$ einsetzen, die Extremwerte berechnen und schließlich die Extrempunkte aufschreiben:

$g(1) = (1-1)^3 + 1 = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$
$\Rightarrow g(x)$ hat den Sattelpunkt S $\left(1|1\right)$.

1.10 Wendestellen, -punkte

Die Wendestellen einer Funktion $f(x)$ sind genau die x-Werte, an denen der Funktionsgraph von $f(x)$ sein Krümmungsverhalten ändert. D.h. der Graph von $f(x)$ wechselt von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt von einer Rechts- in eine Linkskurve. Diese Wendestellen lassen sich berechnen, indem die 2. Ableitung der Funktion (also $f''(x)$) gleich Null gesetzt wird und anschließend diese Gleichung nach x aufgelöst wird. Wenn diese Lösungen für x eingesetzt in die 3. Ableitung der Funktion (also $f'''(x)$) ungleich Null ergeben, so sind sie die Wendestellen der Funktion $f(x)$.



$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Wenn für die Lösungen x_0, x_1, x_2, ... gilt: $f'''(x_{0,1,2,\dots}) \neq 0$
so sind sie Wendestellen von $f(x)$

1.10.1 Wendepunkt

Ein Punkt auf dem Graphen von $f(x)$, bei dem diese „Wende“ (von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt) stattfindet, ist ein Wendepunkt von $f(x)$. Der Wendepunkt wird beschrieben durch seinen x-Wert und y-Wert: $W(x_0|y_0)$. Der x-Wert ist die Wendestelle x_0 (Berechnung siehe oben). Den y-Wert erhält man, indem man die Wendestelle x_0 in die Funktion $f(x)$ einsetzt, also $f(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned}&\text{Wendepunkt (Wendestelle}|y\text{-wert)}\\ &= W(x_0|f(x_0)) = W(x_0|y_0)\end{aligned}$$

Beispiel. Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion
$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x$.

1. Berechne die 1., 2. und die 3. Ableitung der Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 3x$:

$$f'(x) = -\frac{3}{6}x^{3-1} + 2x^{2-1} - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$f''(x) = -\frac{1 \cdot 2}{2}x^{2-1} + 2 = -x + 2$$

$$f'''(x) = -1 + 0 = -1$$

2. Die 2. Ableitung gleich Null setzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned}f''(x) &= 0\\ -x + 2 &= 0 \quad | +x\\ 2 &= x\end{aligned}$$

3. Mit der 3. Ableitung bestimmen, ob ein Wendepunkt vorliegt (falls die 3. Ableitung auch gleich Null ist, muss man mit dem VZW in der 2. Ableitung argumentieren, ob ein Wendepunkt vorliegt $\Rightarrow$ siehe Krümmungsverhalten einer Funktion)

$f'''(2) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt (von $f(x)$ an der Wendestelle $x_0 = 2$)

4. Die Wendestelle in die zugehörige ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen, den y-Wert berechnen und schließlich den Wendepunkt aufschreiben:

$$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 = -\frac{8}{6} + 4 - 6 = -\frac{4}{3} + \frac{12}{3} - \frac{18}{3} = \frac{-4 + 12 - 18}{3} = \frac{-10}{3} = -\frac{10}{3}$$

$\Rightarrow f(x)$ hat den Wendepunkt W $\left(2\middle| -\frac{10}{3}\right)$.

1.11 NEW-Regel

Die NEW-Regel ist eine Hilfestellung, Zusammenhänge zwischen einer Funktion $(f(x))$ und deren Aufleitung $(F(x))$ sowie deren Ableitungen $(f'(x), f''(x))$ aufzuzeigen. Dabei stehen die einzelnen Buchstaben in dem Wort NEW für:

***N* :** Nullstelle
***E* :** Extremstelle
***W* :** Wendestelle

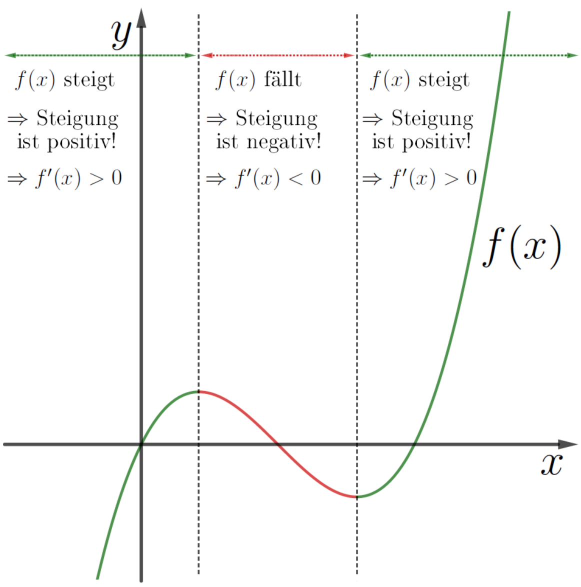
Um die NEW-Regel anzuwenden, schreibt ihr sie folgendermaßen auf:

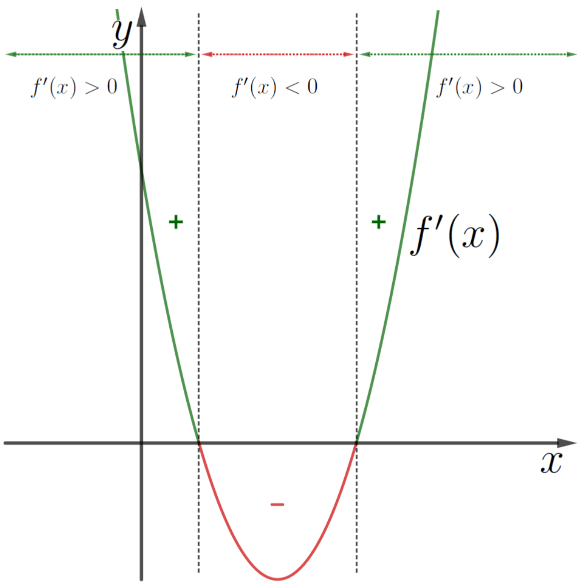
$F(x)$	N	E	W			
$f(x)$		N	E	W		
$f'(x)$			N	E	W	
$f''(x)$				N	E	W

Nun lässt sich **spaltenweise** ablesen, welche Stellen (Null-, Extrem-, oder Wendestelle) in den jeweiligen „Funktionsstadien“ ($F(x)$, $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$) aufeinander folgen. Haben wir beispielsweise in der Funktion $f(x)$ eine Wendestelle vorliegen, so hat $f'(x)$ an genau dieser Stelle eine Extremstelle und $f''(x)$ eine Nullstelle. Weiteres Lesebeispiel: Hat $f'(x)$ eine Nullstelle, so ist an genau dieser Stelle bei $f(x)$ eine Extremstelle und bei $F(x)$ eine Wendestelle.

1.12 Zusammenhänge der Graphen von F, f, f' und f''

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen einer Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$. Die **Ableitung** $f'(x)$ gibt die **Steigung** der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x an (**$f'(x)$ = Steigung von $f(x)$**). D.h. wenn die Funktion $f(x)$ an einer Stelle x ansteigt, so ist die Steigung an dieser Stelle positiv und dementsprechend nimmt $f'(x)$ an genau dieser Stelle einen positiven Wert an. Fällt die Funktion $f(x)$ so ist die Steigung an dieser Stelle negativ und $f'(x)$ nimmt an dieser Stelle einen negativen Wert an.
Hinweis: Dieser Zusammenhang gilt auch zwischen $F(x)$ und deren Ableitung $f(x)$ sowie $f'(x)$ und deren Ableitung $f''(x)$.

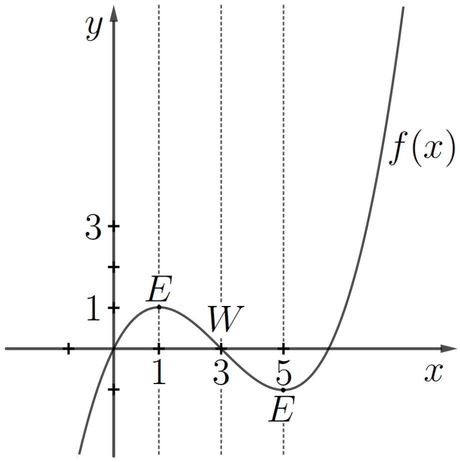




1.12.1 Beispiel Graphischer Zusammenhang zwischen f, f' und f''

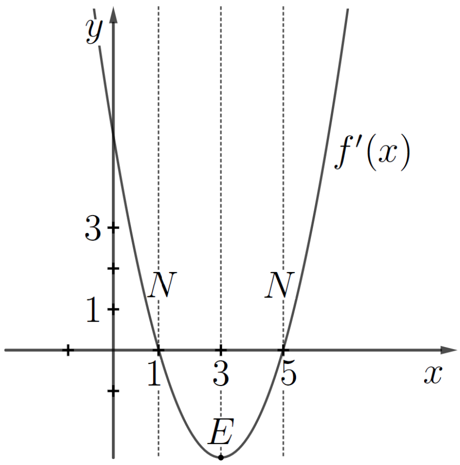
Wir betrachten nun mit Hilfe der NEW-Regel die graphischen Zusammenhänge zwischen $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in den Schaubildern auf der rechten Seite. Die NEW- Regel hierfür lautet:

$f(x)$	N	E	W		
$f'(x)$		N	E	W	
$f''(x)$			N	E	W



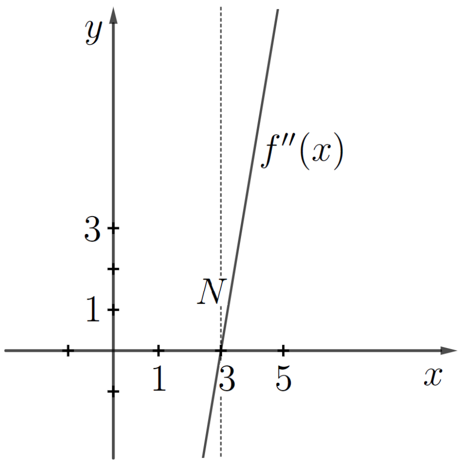
Das 1. Schaubild zeigt die Funktion $f(x)$. Wir identifizieren hier bei $x_0 = 1$ eine Extremstelle E (Hochpunkt von $f(x)$), bei $x_1 = 3$ eine Wendestelle W (Wendepunkt von $f(x)$) und bei $x_2 = 5$ eine Extremstelle E (Tiefpunkt von $f(x)$).

Wenn in der Funktion $f(x)$ eine Extremstelle E vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle eine Nullstelle N und wenn in der Funktion $f(x)$ eine Wendestelle W vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 1. Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle eine Extremstelle E.



Das 2. Schaubild zeigt die 1. Ableitung $f'(x)$. Wir identifizieren hier bei $x_0 = 1$ eine Nullstelle N (Nullstelle von $f'(x)$)✓, bei $x_1 = 3$ eine Extremstelle E (Tiefpunkt von $f'(x)$)✓ und bei $x_2 = 5$ eine Nullstelle N (Nullstelle von $f'(x)$)✓.

Wenn in der 1. Ableitung $f'(x)$ eine Extremstelle E vorliegt, hat nach der NEW-Regel die 2. Ableitung $f''(x)$ an dieser Stelle eine Nullstelle N.

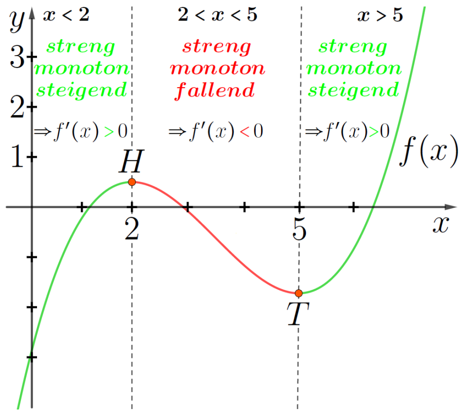


Das 3. Schaubild zeigt die 2. Ableitung $f''(x)$. Wir identifizieren hier bei $x_1 = 3$ eine Nullstelle N (Nullstelle von $f''(x)$)✓.

Hinweis: Diese graphischen Zusammenhänge gelten auch zwischen $F(x)$, $f(x)$ und $f'(x)$ (siehe NEW-Regel).

1.13 Monotonieverhalten einer Funktion

Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion $f(x)$ steigt oder fällt. Da die **Ableitung** $f'(x)$ die **Steigung** der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x angibt (**$f'(x)$ = Steigung von $f(x)$**) gilt für das Monotonieverhalten einer Funktion:



Wenn $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton steigend

Wenn $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton fallend

Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Monotonieverhalten der Funktion $f(x)$:

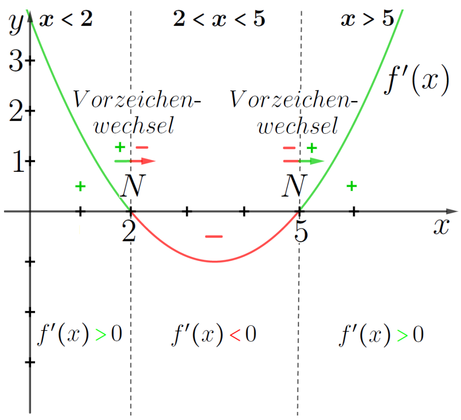
Im Bereich/Intervall $x < 2$ ist $f(x)$ streng monoton steigend

Im Bereich/Intervall $2 < x < 5$ ist $f(x)$ streng monoton fallend

Im Bereich/Intervall $x > 5$ ist $f(x)$ wieder streng monoton steigend

Die Punkte an denen sich das Monotonieverhalten ändert, sind entweder Hoch- oder Tiefpunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Hochpunkt ist, dass die Funktion $f(x)$ davor ansteigt ($\Rightarrow f'(x) > 0$) und anschließend fällt ($\Rightarrow f'(x) < 0$). Beim Tiefpunkt verhält es sich genau andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Monotonieverhalten von $f(x)$, indem man die Extremstellen von $f(x)$, also die Nullstellen N der 1. Ableitung $f'(x)$ bestimmt und anschließend x-Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 1. Ableitung $f'(x)$ einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 1. Ableitung $f'(x)$ vor (also entweder von + nach − oder andersherum), so ist die berechnete Extremstelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Monotonieverhalten von $f(x)$. Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ist die berechnete Extremstelle ein Sattelpunkt und das Monotonieverhalten ändert sich nicht.



Hinweis: Man kann somit also auch durch Bestimmung des Monotonieverhaltens einer Funktion $f(x)$ herausfinden, ob an einer Extremstelle ein Hochpunkt, Tiefpunkt oder Sattelpunkt vorliegt:

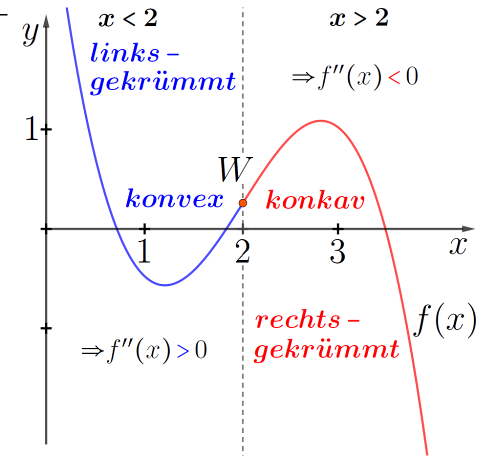
Wenn bei der Nullstelle N in $f'(x)$ ein VZW von + nach − $\Rightarrow$ Hochpunkt in $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle N in $f'(x)$ ein VZW von − nach + $\Rightarrow$ Tiefpunkt in $f(x)$

Wenn bei der Nullstelle N in $f'(x)$ **kein** VZW $\Rightarrow$ Sattelpunkt in $f(x)$

1.14 Krümmungsverhalten einer Funktion

Das Krümmungsverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Bereichen (Intervallen) der Graph einer Funktion $f(x)$ entlang einer Linkskurve, entlang einer Rechtskurve oder einfach nur „gerade“ verläuft. Die 2. Ableitung $f''(x)$ gibt uns Auskunft über das Krümmungsverhalten einer Funktion:



Wenn $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist linksgekrümmt/konvex

Wenn $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist rechtsgekrümmt/konkav

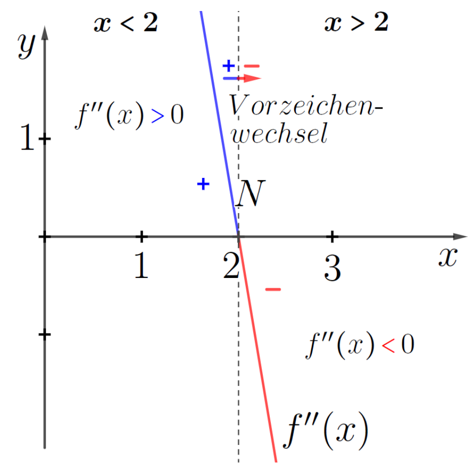
Im rechten Schaubild identifiziert man somit folgendes Krümmungsverhalten der Funktion $f(x)$:

Im Bereich/Intervall $x < 2$ ist $f(x)$ linksgekrümmt/konvex

Im Bereich/Intervall $x < 2$ ist $f(x)$ rechtsgekrümmt/konkav

Die Punkte an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, sind Wendepunkte. Klar, denn charakteristisch bei einem Wendepunkt ist, dass die Funktion $f(x)$ an diesem Punkt eine „Wende“ vornimmt, entweder von einer Links- in eine Rechtskurve oder andersherum.

Somit berechnet man die Bereiche/Intervalle für das jeweilige Krümmungsverhalten von $f(x)$, indem man die Wendestellen von $f(x)$, also die Nullstellen der 2. Ableitung $f''(x)$ bestimmt und anschließend x-Werte größer und kleiner dieser Stellen in die 2. Ableitung $f''(x)$ einsetzt. Liegt nun ein Vorzeichenwechsel (VZW) in der 2. Ableitung $f''(x)$ vor (also entweder von + nach − oder andersherum), so ist die berechnete Wendestelle eine Bereichs-/Intervallgrenze für das Krümmungsverhalten von $f(x)$. Liegt kein Vorzeichenwechsel vor, so ändert sich das Krümmungsverhalten von $f(x)$ nicht.



1.15 Definitionsbereich

Der Definitionsbereich D_f einer Funktion $f(x)$ beschreibt alle x-Werte, die man in die Funktion $f(x)$ einsetzen „darf". In der Regel sind Funktionen über die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfassen alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, also $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= -\infty < x < +\infty$. Einzelne Zahlen, die nicht in die Funktion eingesetzt werden dürfen, bezeichnet man als Definitionslücken. Schreibweise für den Definitionsbereich D_f einer Funktion $f(x)$ ist:

$$
\begin{aligned}
&D_f = \mathbb{R} \ \Rightarrow \text{Alle reellen Zahlen dürfen für } x \text{ eingesetzt werden}\\
&D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\} \Rightarrow \text{Alle reellen Zahlen bis auf } x_1, x_2 \text{ dürfen für } x \text{ eingesetzt werden}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow x_1, x_2 \text{ sind Definitionslücken}\\
&D_f = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{Alle positiven reellen Zahlen größer 0 dürfen für } x \text{ eingesetzt werden}\\
&D_f = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \text{Alle positiven reellen Zahlen und die 0 dürfen für } x \text{ eingesetzt werden}
\end{aligned}
$$

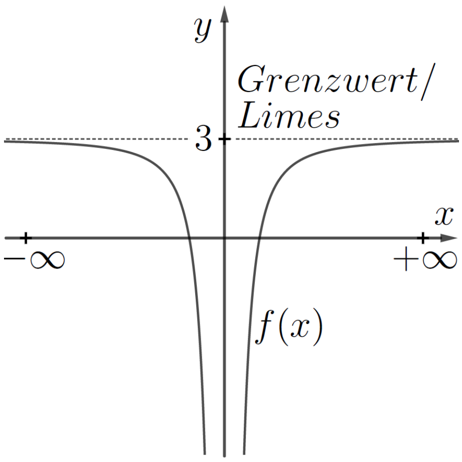
Beispiel. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktionen $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$, $g(x) = \dfrac{3}{x-1}$, $h(x) = \ln(x)$ und $i(x) = \sqrt{x}$.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2x^2 + 3x - 7 && \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\\
&g(x) = \frac{3}{x-1} && \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}\\
&h(x) = \ln(x) && \Rightarrow D_h = \mathbb{R}^+\\
&i(x) = \sqrt{x} && \Rightarrow D_i = \mathbb{R}_0^+
\end{aligned}
$$

1.16 Grenzwert/Limes einer Funktion

Der Grenzwert oder auch Limes einer Funktion $f(x)$ beschreibt das Grenzverhalten dieser Funktion. Die „Grenzen" sind dabei $+\infty$ und $-\infty$ auf der x-Achse. Die Frage des Grenzwerts/Limes einer Funktion $f(x)$ ist also: Was passiert mit der Funktion $f(x)$, wenn einmal x gegen $+\infty$ und einmal x gegen $-\infty$ geht, gegen welchen Wert strebt $f(x)$ an diesen „Grenzen"? Die Schreibweise ist folgende:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) \ \big(\text{für } x \text{ gegen } +\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...}\big)\\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) \ \big(\text{für } x \text{ gegen } -\infty \text{ geht } f(x) \text{ gegen...}\big)
\end{aligned}
$$



Beispielsweise strebt im rechten Schaubild die Funktion $f(x)$ sowohl für die „Grenze" $x = +\infty$, als auch für $x = -\infty$ gegen den Grenzwert/Limes 3. Also in diesem Fall $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion $f(x)$ setzen wir einmal für $x = +\infty$ ein sowie einmal $x = -\infty$ ein und schauen dann, was bei der Funktion rauskommt. Wichtig ist es ein Verständnis dafür zu bekommen, was dieses „Einsetzen von ∞ für x" mit verschiedenen Termen macht. Die wichtigste Erkenntnis ist, dass $\frac{1}{\infty} = 0$ ist, also $\frac{1}{\text{Eine riesengroße Zahl (nämlich } \infty)} = 0$. Anbei einige Beispiele fürs Verständnis:

$$
\begin{aligned}
f(x) = x + 2, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2 \xrightarrow{x\to+\infty} \infty + 2 = \infty \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 2 \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty + 2 = -\infty \\
f(x) = x^2 - 5, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x\to+\infty} (\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 5 \xrightarrow{x\to-\infty} (-\infty)^2 - 5 = \infty - 5 = \infty \\
f(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{1}{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1 \\
f(x) = \frac{3}{x+2}, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{3}{\infty + 2} = \frac{3}{\infty} = 0 \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x+2} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{3}{-\infty + 2} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\
f(x) = e^x, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \xrightarrow{x\to+\infty} e^\infty = \infty \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x \xrightarrow{x\to-\infty} e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
f(x) = \frac{1}{e^x}, \quad & \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\
& \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-\infty}} = e^\infty = \infty
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die in den obigen Beispielen benutzte Schreibweise soll nur zum Verständnis dienen und kann in einer Nebenrechnung angewandt werden. Die **korrekte** mathematische Schreibweise für die Berechnung des Grenzwerts/Limes einer Funktion ist in den folgenden Beispielen dargestellt. Hierbei zeigen geschweifte Klammern unter den Termen an, was mit dem Term passiert wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

Beispiel. Bestimmen Sie die Grenzwerte der beiden Funktionen
$f(x) = \frac{1}{x+7} - 2$ und $g(x) = 30 + \frac{3}{e^x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\to 0} -2 = 0 - 2 = -2$$

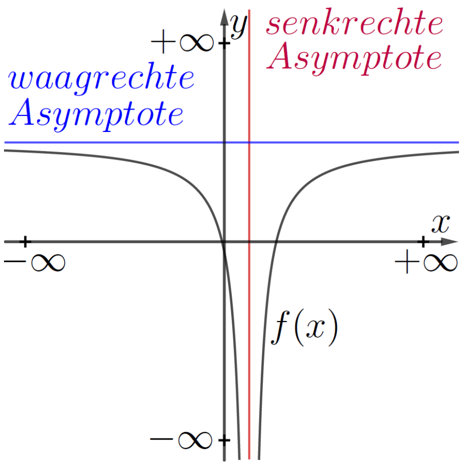
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x+7}}_{\to 0} -2 = 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 30 + \underbrace{\frac{3}{e^x}}_{\to 0} = 30 + 0 = 30$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 30 + \frac{3}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} 30 + 3\underbrace{e^{-x}}_{\to\infty} = \infty$$

1.17 Asymptoten

Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich eine Funktion $f(x)$ im Unendlichen immer weiter annähert. Wir unterscheiden waagrechte und senkrechte Asymptoten.



Eine waagrechte Asymptote ist eine waagrechte Gerade, der sich die Funktion $f(x)$ im **Unendlichen in Richtung der x-Achse** immer weiter annähert.

Eine senkrechte Asymptote ist eine senkrechte Gerade, der sich die Funktion $f(x)$ im **Unendlichen in Richtung der y-Achse** immer weiter annähert.

Eine waagrechte Asymptote einer Funktion $f(x)$ existiert genau dann, wenn ein Grenzwert/Limes einer Funktion $f(x)$ existiert, der NICHT ∞ oder $-\infty$ ist, sondern irgendeine andere Zahl. Um also die waagrechte Asymptote einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, berechnet man zunächst den Grenzwert/Limes von $f(x)$, setzt y = Grenzwert/Limes und erhält somit die gesuchte waagrechte Gerade.

$$\textbf{Waagrechte Asymptote von } \boldsymbol{f(x)}\textbf{:} \quad y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

Eine senkrechte Asymptote einer Funktion $f(x)$ existiert, wenn die Funktion $f(x)$ Definitionslücken besitzt, d.h. wenn einzelne x-Werte existieren, die man nicht in die Funktion $f(x)$ einsetzen darf. Ist eine senkrechte Asymptote einer Funktion $f(x)$ vorhanden, bestimmt man diese, indem man schaut, welche Definitionslücke $f(x)$ hat, setzt x = Definitionslücke und erhält somit die gesuchte senkrechte Gerade.

$$\textbf{Senkrechte Asymptote von } \boldsymbol{f(x)}\textbf{:} \quad x = \text{Definitionslücke von } f(x)$$

Beispiel. Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion $f(x) = 3e^x - 1$ auf Asymptoten/asymptotisches Verhalten.

1. Bestimme den Grenzwert/Limes von $f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\underbrace{e^x}_{\to\infty} -1 = \infty$ $\quad\Rightarrow$ Keine waagrechte Asymptote

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3\underbrace{\frac{1}{e^{-x}}}_{\to 0} -1 = -1$ $\quad\Rightarrow$ Waagrechte Asymptote: $y = -1$

2. Untersuche $f(x)$ auf Definitionslücken (x-Werte, die ich nicht einsetzen darf):
$f(x)$ hat keine Definitionslücke $\quad\Rightarrow$ Keine senkrechte Asymptote vorhanden

Beispiel. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{2}{x} + 7x + 5$ auf Asymptoten/asymptotisches Verhalten.

1. Bestimme den Grenzwert/Limes von $f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} +7\underbrace{x}_{\to\infty} +5 = \infty$ $\quad\Rightarrow$ Keine waagrechte Asymptote

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} +7\underbrace{x}_{\to-\infty} +5 = -\infty$ $\quad\Rightarrow$ Keine waagrechte Asymptote

2. Untersuche $f(x)$ auf Definitionslücken (x-Werte, die ich nicht einsetzen darf):
$f(x)$ hat die Definitionslücke $x = 0$ (Man darf nicht durch Null teilen!)
$\Rightarrow$ Senkrechte Asymptote: $x = 0$

Beispiel. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ auf Asymptoten/asymptotisches Verhalten.

1. Bestimme den Grenzwert/Limes von $f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\to 0} = 0$ $\quad\Rightarrow$ Waagrechte Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-3)^2}}_{\to 0} = 0$ $\quad\Rightarrow$ Waagrechte Asymptote: $y = 0$

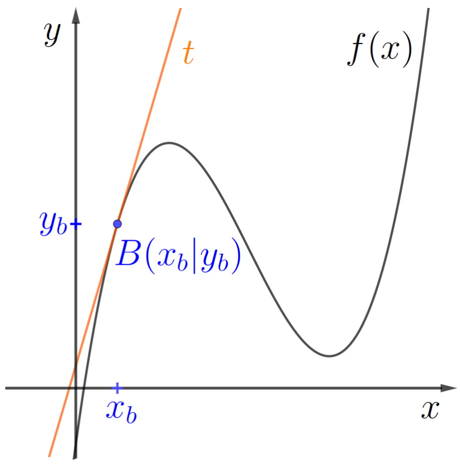
2. Untersuche $f(x)$ auf Definitionslücken (x-Werte, die ich nicht einsetzen darf):
$f(x)$ hat die Definitionslücke $x = 3$ (Man darf nicht durch Null teilen!)
$\Rightarrow$ Senkrechte Asymptote: $x = 3$

1.18 Tangente

Eine Tangente t ist eine Gerade, die die Funktion $f(x)$ an einem Punkt berührt (dem sogenannten Berührpunkt $B(x_b|y_b)$). Berühren bedeutet, dass die Steigung der Tangente t die Gleiche ist, wie die Steigung der Funktion $f(x)$ am Berührpunkt B. D.h. t und $f(x)$ schneiden sich NICHT im Punkt B, sondern berühren sich dort.

Da die **Ableitung** einer Funktion ($f'(x)$) die **Steigung** der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x angibt (**$f'(x)$ = Steigung von $f(x)$**), wird die Steigung von $f(x)$ am Berührpunkt B mit Einsetzen des x-Werts x_b in die Ableitung $f'(x)$ berechnet.

$$\begin{aligned} f'(x_b) &= \text{Steigung der Funktion } f(x) \text{ bei } B \\ &= \text{Steigung der Tangente } t \end{aligned}$$



Eine Tangente t wird mit einer Tangentengleichung beschrieben. Die allgemeine Form der Tangentengleichung ist:

$$t: \; y = m \cdot x + c$$

Dabei ist m die Steigung der Tangente t und c ist der Schnittpunkt von t mit der y-Achse. Um also die Tangentengleichung einer Tangente t aufzustellen, muss man nur m und c herausfinden, in die allgemeine Form der Tangentengleichung einsetzen und erhält die Geradengleichung für die Tangente t. Das Schema zur Bestimmung einer Tangentengleichung ist folgendes:

1. Bestimme den x-Wert und den y-Wert des Berührpunktes $B(x_b|y_b)$.

2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf: $t: \; y = m \cdot x + c$

3. Berechne die 1. Ableitung von $f(x)$, also $f'(x)$.

4. Setze x_b in $f'(x)$ ein und erhalte m: $f'(x_b) = m$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung m ein, für x setze x_b ein und für y setze y_b ein. Anschließend löse die Gleichung nach c auf:

$y_b = m \cdot x_b + c$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung t auf, indem du m und c in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt: $t: \; y = m \cdot x + c$

Hinweis: Ist die Aufgabenstellung eine sogenannte Wendetangente der Funktion $f(x)$ zu bestimmen, dann ist damit die Tangente gemeint, die durch den Wendepunkt der Funktion $f(x)$ verläuft. D.h. der Berührpunkt ist der Wendepunkt von $f(x)$ (In diesem Fall schneidet die Tangente auch die Funktion $f(x)$ im Punkt B). Also muss man zuerst den x- und y-Wert dieses Wendepunktes bestimmen.

Beispiel. Bestimmen Sie die Tangente der Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$ an der Stelle $x = 1$.

1. Bestimme den x- und y-Wert des Berührpunktes: Setze $x_b = 1$ in $f(x)$ ein
$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 4 + 2 = -1 = y_b \quad \Rightarrow$ Berührpunkt $B(1|-1)$

2. Schreibe die allgemeine Form der Tangentengleichung auf:
$t: \ y = m \cdot x + c$

3. Berechne die 1. Ableitung von $f(x)$, also $f'(x)$:
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$

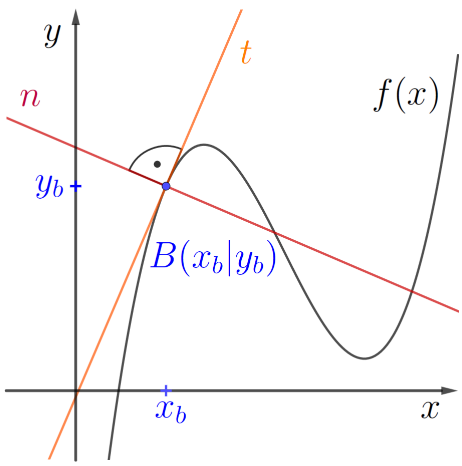
4. Setze $x_b = 1$ in $f'(x)$ ein und erhalte m:
$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 3 - 8 + 2 = -3 = m$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Tangentengleichung $m = -3$ ein, für x setze $x_b = 1$ ein und für y setze $y_b = -1$ ein. Nun löse die Gleichung nach c auf:
$-1 = -3 \cdot 1 + c \quad | +3$
$2 \ \ = c$

6. Nun schreibe die Tangentengleichung t auf, indem du $m = -3$ und $c = 2$ in die allgemeine Tangentengleichung einsetzt:
$t: \ y = -3x + 2$

1.19 Normale

Eine Normale n ist eine Gerade, die senkrecht/ orthogonal zur Tangente t an einer Funktion $f(x)$ durch deren Berührpunkt $B(x_b|y_b)$ verläuft. D.h. die Normale n und die Tangente t schneiden sich in einem rechten Winkel am Berührpunkt B.



Die Steigung der Tangente t ist $f'(x_b)$ (siehe vorheriges Kapitel). Für die orthogonal/senkrecht zu der Tangente verlaufende Normale n wird die Steigung berechnet mit: Minus 1 geteilt durch $f'(x_b)$.

$$-\frac{1}{f'(x_b)} = \text{Steigung der Normale } n$$

Eine Normale n wird mit einer Normalengleichung beschrieben. Die allgemeine Form der Normalengleichung ist:

$$n: \ y = m \cdot x + c$$

Dabei ist m die Steigung der Normale n und c ist der Schnittpunkt von n mit der y-Achse. Um also die Normalengleichung einer Normale n aufzustellen, muss man nur m

und c herausfinden, in die allgemeine Form der Normalengleichung einsetzen und erhält die Geradengleichung für die Normale n. Das Schema zur Bestimmung einer Normalengleichung ist folgendes:

1. Bestimme den x-Wert und den y-Wert des Berührpunktes $B(x_b|y_b)$.

2. Schreibe die allgemeine Form der Normalengleichung auf: $n: \ y = m \cdot x + c$

3. Berechne die 1. Ableitung von $f(x)$, also $f'(x)$.

4. Setze x_b in $f'(x)$ ein, teile -1 durch dieses Ergebnis $f'(x_b)$ und erhalte m:
$-\dfrac{1}{f'(x_b)} = m$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Normalengleichung m ein, für x setze x_b ein und für y setze y_b ein. Anschließend löse die Gleichung nach c auf:
$y_b = m \cdot x_b + c$

6. Nun schreibe die Normalengleichung n auf, indem du m und c in die allgemeine Normalengleichung einsetzt: $n: \ y = m \cdot x + c$

Beispiel. Bestimmen Sie die Normale der Funktion $f(x) = x^3 - 4x + 1$ an der Stelle $x = 1$.

1. Bestimme den x- und y-Wert des Berührpunktes: Setze $x_b = 1$ in $f(x)$ ein
$f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 = y_b \quad \Rightarrow$ Berührpunkt $B(1|-2)$

2. Schreibe die allgemeine Form der Normalengleichung auf:
$n: \ y = m \cdot x + c$

3. Berechne die 1. Ableitung von $f(x)$, also $f'(x)$:
$f'(x) = 3x^2 - 4$

4. Setze $x_b = 1$ in $f'(x)$ ein, teile -1 durch dieses Ergebnis $f'(1)$ und erhalte m:
$-\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{3 \cdot 1^2 - 4} = -\dfrac{1}{3-4} = -\dfrac{1}{-1} = 1 = m$

5. Nun setze in die allgemeine Form der Normalengleichung $m = 1$ ein, für x setze $x_b = 1$ ein und für y setze $y_b = -2$ ein. Nun löse die Gleichung nach c auf:
$-2 = 1 \cdot 1 + c \quad | -1$
$-3 = c$

6. Nun schreibe die Normalengleichung n auf, indem du $m = 1$ und $c = -3$ in die allgemeine Normalengleichung einsetzt:
$n: \ y = x - 3$

1.20 Ganzrationale Funktionen

Bei einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ **n-ten Grades** ist n der höchste Exponent (Hochzahl) von x. Seien a, b, c, d und e beliebige reelle Zahlen, dann ist zum Beispiel die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **4-ten Grades**:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \qquad \Rightarrow 4 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **3-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \Rightarrow 3 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion **2-ten Grades** ist:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \Rightarrow 2 \text{ ist höchster Exponent (Hochzahl) von } x$$

Beispiel. $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$
$\Rightarrow$ Ganzrationale Funktion 3-ten Grades mit $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$ und $d = 1$
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \quad \Rightarrow$ Ganzrationale Funktion 2-ten Grades mit $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und $c = 0$

1.20.1 Funktionsgleichung bestimmen

Ist die Aufgabenstellung die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ ***n*-ten Grades** zu bestimmen unter gewissen Bedingungen (z.B. Hochpunkt an Stelle $x = 1$, Wendepunkt an Stelle $x = -3$, Verlauf durch den Ursprung etc.), so schreibt man zunächst die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion ***n*-ten Grades** auf und bildet davon die 1. und 2. Ableitung ($f'(x)$ und $f''(x)$). Nun müssen $\boldsymbol{n+1}$ Gleichungen, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden $\boldsymbol{n+1}$ Bedingungen an die Funktion $f(x)$, aufgestellt werden. Diese $\boldsymbol{n+1}$ Gleichungen bilden ein Gleichungssystem, das nach den Variablen a, b, c, d, ... aufgelöst wird. Schließlich liefert das Einsetzen der berechneten Variablen in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion $f(x)$ ***n*-ten Grades** die zu bestimmende Funktionsgleichung.

Hinweis: Entnimmt man der Aufgabenstellung, dass die gesuchte ganzrationale Funktion **achsensymmetrisch** ist, so sind direkt alle gesuchten Variablen a, b, c, d, ... GLEICH Null, die vor einem x mit **ungeradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**). Ist die gesuchte ganzrationale Funktion **punktsymmetrisch**, so sind direkt alle gesuchten Variablen a, b, c, d, ... GLEICH Null, die vor einem x mit **geradem** Exponenten/Hochzahl stehen (siehe Symmetrie **Hinweis**).

Beispiel. Der Graph einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ dritten Grades hat den Hochpunkt $H(0|1)$ und an der Stelle $x = 1$ die Tangente mit der Gleichung $t : y = -5x + 3$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von $f(x)$.

1. Schreibe die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion $f(x)$ 3-ten Grades auf und bilde die 1. und 2. Ableitung $f'(x)$ sowie $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

2. Da $3+1=4$ Variablen (nämlich a, b, c und d) bestimmt werden müssen, um die Funktionsgleichung aufstellen zu können, stelle nun 4 Gleichungen auf, mithilfe der aus der Aufgabenstellung herauszulesenden 4 Bedingungen an die Funktion $f(x)$:

Die Funktion $f(x)$ verläuft durch den Punkt $H(0|1)$:
$f(0) = 1$
$a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1 \quad$ (1. Gleichung)

Da $H(0|1)$ ein Hochpunkt ist, hat $f(x)$ bei $x=0$ eine Extremstelle, deshalb gilt:
$f'(0) = 0$
$3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0 \quad$ (2. Gleichung)

Da $f(x)$ an der Stelle $x=1$ die Tangente t hat, verläuft die Funktion $f(x)$ durch den Berührpunkt $B(1|-2)$ ($-2 = y_b$ deshalb, da $x_b = 1$ eingesetzt in die Tangente $t: -5\cdot 1 + 3 = -2$ ist):
$f(1) = -2$

$$a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = -2 \quad \xrightarrow{d=1 \text{ und } c=0} \quad a + b + 0 + 1 = -2 \quad |-1$$
$$a + b = -3 \quad \text{(3. Gleichung)}$$

Da $f(x)$ an der Stelle $x=1$ die Tangente t hat, hat $f(x)$ an dieser Stelle die gleiche Steigung wie t ($m_t = -5$), deshalb gilt:
$f'(1) = -5$

$$3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = -5 \quad \xrightarrow{c=0} \quad 3a + 2b + 0 = -5$$
$$3a + 2b = -5 \quad \text{(4. Gleichung)}$$

3. Löse das Gleichungssystem. Es gilt nur noch a und b mithilfe der 3. und 4. Gleichung herauszufinden. Löse 3. Gleichung nach a auf und setze dieses a in die 4. Gleichung ein:

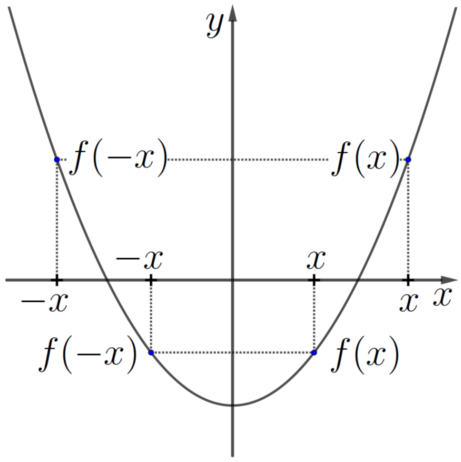
$$\begin{aligned}
\text{(3. Gleichung)}\quad a + b &= -3 && |-b\\
a &= -3 - b\\
\text{(4. Gleichung)}\quad 3a + 2b &= -5 && |\ a = -3 - b \text{ einsetzen}\\
3(-3 - b) + 2b &= -5\\
-9 - 3b + 2b &= -5 && |+9\\
-b &= 4 && |\cdot(-1)\\
b &= -4\\
\text{(3. Gleichung)}\quad a + b &= -3 && |\ b = -4 \text{ einsetzen}\\
a - 4 &= -3 && |+4\\
a &= 1
\end{aligned}$$

4. Einsetzen der berechneten Variablen $a=1$, $b=-4$, $c=0$ und $d=1$ in die allgemeine Form der ganzrationalen Funktion dritten Grades liefert die Funktionsgleichung:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

1.21 Symmetrie

Bei symmetrischen Funktionen unterscheidet man in Achsensymmetrie (bezüglich der y-Achse) und Punktsymmetrie (bezüglich dem Ursprung $(0|0)$). Eine Funktion $f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn sie spiegelsymmetrisch zur y-Achse angeordnet ist. D.h. setzt man einen beliebigen **positiven** x-Wert in die Funktion $f(x)$ ein, kommt derselbe Funktionswert $f(x)$ (y-Wert) heraus, wie wenn man den „gegensätzlichen" **negativen** x-Wert in die Funktion $f(x)$ einsetzt. Also ist eine Funktion $f(x)$ achsensymmetrisch, wenn für jeden x-Wert folgendes gilt:



$$f(-x) = f(x)$$

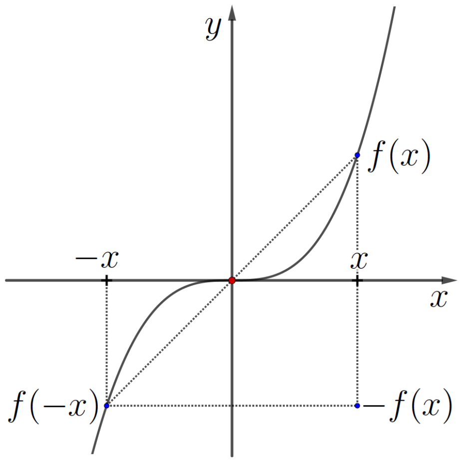
Beispiel. $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ ist achsensymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = x^4 + 2x^2 - 1 = f(x) \quad \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

Eine Funktion $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, wenn für jeden x-Wert folgendes gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Das heißt man kann jeden Punkt auf der Funktion $f(x)$ am Ursprung spiegeln und „landet" in gleichem Abstand wieder auf der Funktion $f(x)$.



Beispiel. $f(x) = x^3 + x$ ist punktsymmetrisch. Nachweis:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \quad \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

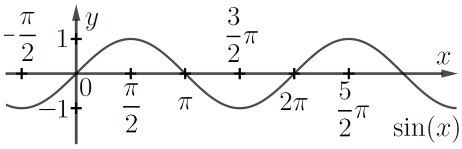
Hinweis: Bei ganzrationalen Funktionen lässt sich sehr einfach eine Symmetrie erkennen. Eine Achsensymmetrie liegt dann vor, wenn $f(x)$ **nur gerade** Exponenten (Hochzahlen) bei x besitzt! Eine Punktsymmetrie liegt dann vor, wenn $f(x)$ **nur ungerade** Exponenten (Hochzahlen) bei x besitzt!

1.22 Trigonometrische Funktionen (Sinus, Cosinus)

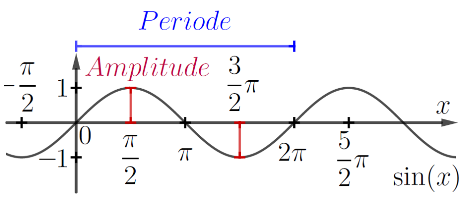
Die folgenden trigonometrischen Funktionen, oder auch Winkelfunktionen genannt, werden im Bogenmaß betrachtet. Das Bogenmaß ist wie das Gradmaß ein Winkelmaß und wird in Abhängigkeit von π angegeben:

Winkelmaß	Bogenmaß
0	0
90°	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$
180°	$\pi \approx 3,14$
360°	$2\pi \approx 6,28$

Im rechten Schaubild ist die normale Sinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Sinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:

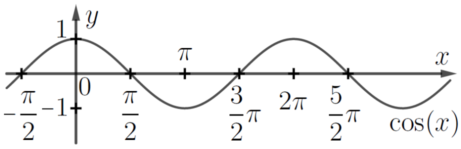


x-Wert	y-Wert
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
π	$\sin(\pi) = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$
2π	$\sin(2\pi) = 0$

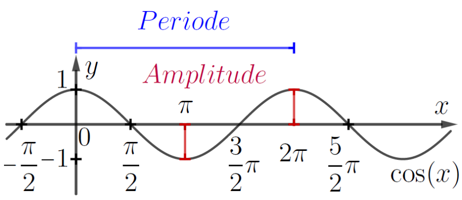


Die Periode der normalen Sinusfunktion beträgt 2π. Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle an.
Eine Welle besteht aus einem „Berg “ und einem „Tal“. Die Sinusfunktion startet im Ursprung (also bei 0) durchläuft einen „Berg“ und danach ein „Tal“. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Sinusfunktion periodisch.
Die Amplitude der normalen Sinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags“ in y-Richtung der Sinusfunktion nach oben und unten an.

Im rechten Schaubild ist die normale Cosinusfunktion dargestellt, woraus sich die zentralen Eigenschaften der Cosinusfunktion ablesen lassen (Am besten das Schaubild auswendig lernen!!!). Daraus ergibt sich die folgende Wertetabelle:



x-Wert	y-Wert
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
π	$\cos(\pi) = -1$
$\frac{3}{2}\pi$	$\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$
2π	$\cos(2\pi) = 1$



Die Periode der normalen Cosinusfunktion beträgt 2π. Sie gibt uns die Länge einer „kompletten“ Welle

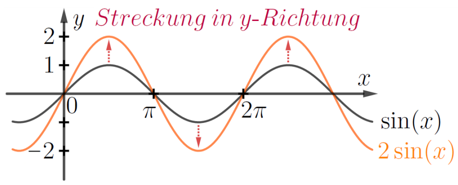
an. Eine Welle besteht aus einem „Berg " und einem „Tal". Die Cosinusfunktion startet bei 1 (beim „Gipfel des Berges") durchläuft ein „Tal" und kommt anschließend wieder bei 1 (beim „Gipfel des 2. Berges") an. Danach wiederholt sich das gleiche Spiel von vorne. Deshalb ist die Cosinusfunktion periodisch.
Die Amplitude der normalen Cosinusfunktion beträgt 1. Sie gibt uns die Länge des maximalen „Ausschlags" in y-Richtung der Cosinusfunktion nach oben und unten an.

1.22.1 Allgemeine Sinus- /Cosinusfunktion und ihre Eigenschaften

Die allgemeine Sinusfunktion hat die folgende Funktionsgleichung:

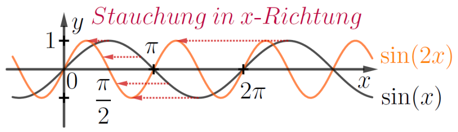
$$f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$$

Das a gibt die Amplitude der Sinusfunktion an und damit die Streckung/Stauchung der Funktion in y-Richtung. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion $2\sin(x)$ $a = 2$. Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion $\sin(x)$ um das 2-fache in y-Richtung gestreckt. Die Amplitude beträgt somit 2.



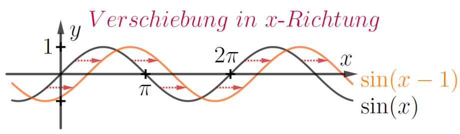
Das b bestimmt die Periode (Länge einer Welle) und gibt somit die Streckung/Stauchung der Funktion in x-Richtung an. Formel zur Berechung der Periode P ist:

$$P = \frac{2\pi}{b}$$

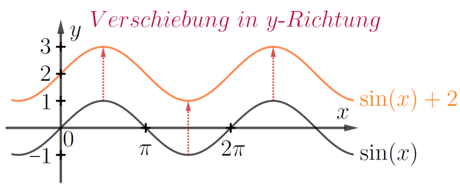


Im Schaubild rechts ist bei der Funktion $\sin(2x)$, $b = 2$. Die Periode beträgt somit π.

Das c gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in x-Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion $\sin(x-1)$, $c = 1$. Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 1 nach rechts verschoben.



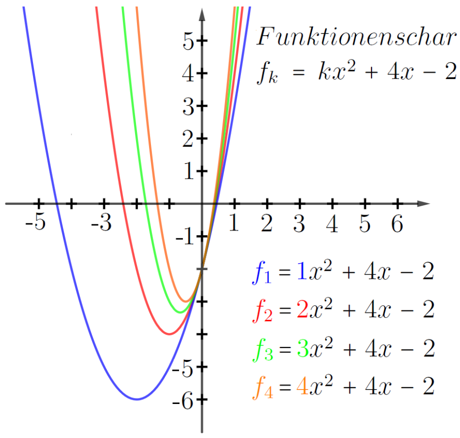
Das d gibt die Verschiebung der Sinusfunktion in y-Richtung an. Im Schaubild rechts ist bei der Funktion $\sin(x) + 2$, $d = 2$. Sie ist somit im Vergleich zur normalen Sinusfunktion um 2 nach oben verschoben.



Hinweis: Diese Eigenschaften gelten genauso für die allgemeine Cosinusfunktion: $f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$.

1.23 Funktionenschar

Eine Funktionenschar $f_k(x)$ ist eine Vielzahl von Funktionen, die dasselbe „Muster“ haben. Neben dem Parameter x hat eine Funktionenschar $f_k(x)$ noch einen weiteren Parameter k für den beliebige Werte eingesetzt werden können (oft ist der weitere Parameter auch a, dann ist die Funktionenschar $f_a(x)$). Zu jedem Wert des Parameters k gehört eine Funktion der Funktionenschar. Beispiel für eine Funktionenschar $f_k(x)$ und den zugehörigen Funktionen mit $k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4$ wäre:



$$f_k = kx^2 + 4x - 2$$

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad f_1 = 1x^2 + 4x - 2 \\ k = 2: &\quad f_2 = 2x^2 + 4x - 2 \\ k = 3: &\quad f_3 = 3x^2 + 4x - 2 \\ k = 4: &\quad f_4 = 4x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

Rechnen mit Funktionenscharen: Sofern für den Parameter k kein explizierter Wert angegeben ist, so betrachtet k einfach als eine „normale Zahl“, also in Rechnungen wie bei einer „normalen Zahl“ vorgehen. Die Lösungen solcher Rechnungen sind dann meist keine konkrete Zahl, sondern in Abhängigkeit von dem Parameter k (d.h. in der Lösung ist das k vorhanden).

Beispiel. Berechne die Extrempunkte der Funktionenschar $f_k(x) = kx^2 + 4x - 2$.

1. Berechne die 1. Ableitung der Funktionenschar $f_k(x)$:
$f_k(x) \ = kx^2 + 4x - 2$
$f_k'(x) \ = 2kx + 4 \quad \Rightarrow$ (Beim Ableiten wurde k wie eine „normale Zahl“ gehandhabt)

2. Die 1. Ableitung der Funktionenschar $f_k(x)$ gleich Null setzen und nach x auflösen:

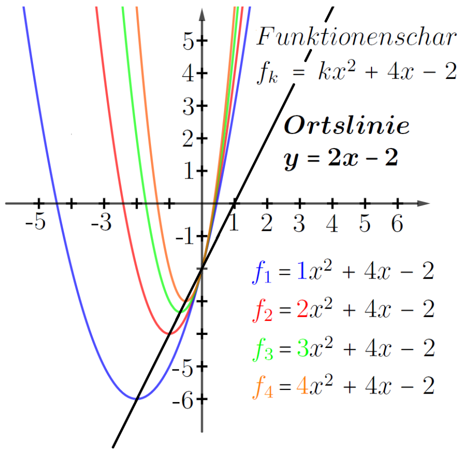
$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 \\ 2kx + 4 &= 0 \quad \mid -4 \\ 2kx &= -4 \quad \mid : 2k \\ x &= \frac{-4}{2k} = -\frac{2}{k} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung der Extremstelle x ist in Abhängigkeit von k

3. Einsetzen der Extremstelle $x = -\frac{2}{k}$ in $f_k(x)$ liefert den y-Wert des Extrempunkts:

$$f_k\left(-\frac{2}{k}\right) = k \cdot \left(-\frac{2}{k}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{k}\right) - 2 = \frac{4k}{k^2} - \frac{8}{k} - 2 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 2 = -\frac{4}{k} - 2 \Rightarrow E\left(-\frac{2}{k} \middle| -\frac{4}{k} - 2\right)$$

1.23.1 Ortskurve/-linie



Eine Ortskurve/-linie ist eine Funktion, die Punkte einer Funktionenschar $f_k(x)$ miteinander verbindet, die eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft besitzen. Beispielsweise verbindet eine Ortskurve/-linie alle Hochpunkte einer Funktionenschar miteinander oder alle Wendepunkte, usw.

Die Berechnung einer solchen Ortskurve/-linie erfolgt über die bestimmte gemeinsame Eigenschaft der Punkte auf der Funktionenschar. Ist beispielsweise die Ortskurve/-linie der Tiefpunkte der Funktionenschar $f_k(x)$ gesucht (siehe rechtes Schaubild), so bestimmt man zunächst allgemein die Tiefpunkte der Funktionenschar $f_k(x)$ $T(x|y)$ (meist in Abhängigkeit von k), löst die Gleichung der berechneten x-Variable nach dem Parameter k auf, setzt dieses nun berechnete k (in Abhängigkeit von x) in die Gleichung der berechneten y-Variable ein und erhält die gesuchte Ortskurve/-linie.

Beispiel. Berechne die Ortslinie der Tiefpunkte der Funktionenschar $f_k(x) = kx^2+4x-2$.

1. Berechne die 1. Ableitung der Funktionenschar $f_k(x)$:
$f_k(x) \ = kx^2 + 4x - 2$
$f_k'(x) \ = 2kx + 4 \quad \Rightarrow$ (Beim Ableiten wurde k wie eine „normale Zahl“ gehandhabt)

2. Die 1. Ableitung der Funktionenschar $f_k(x)$ gleich Null setzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 0 \\ 2kx + 4 &= 0 \quad | -4 \\ 2kx &= -4 \quad | :2k \\ x &= \frac{-4}{2k} = -\frac{2}{k} \end{aligned}$$
$\Rightarrow$ Die Lösung der Extremstelle x ist in Abhängigkeit von k

3. Einsetzen der Extremstelle $x = -\frac{2}{k}$ in $f_k(x)$ liefert den y-Wert des Tiefpunkts:

$$f_k\left(-\frac{2}{k}\right) = k\cdot\left(-\frac{2}{k}\right)^2 + 4\cdot(-\frac{2}{k}) - 2 = \frac{4k}{k^2} - \frac{8}{k} - 2 = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 2 = -\frac{4}{k} - 2 \Rightarrow T\left(-\frac{2}{k}\middle| -\frac{4}{k} - 2\right)$$

4. Die Gleichung der berechneten x-Variable $x = -\frac{2}{k}$ nach k auflösen:

$$x = -\frac{2}{k} \quad | \cdot k \quad | :x \qquad \Rightarrow k = -\frac{2}{x}$$

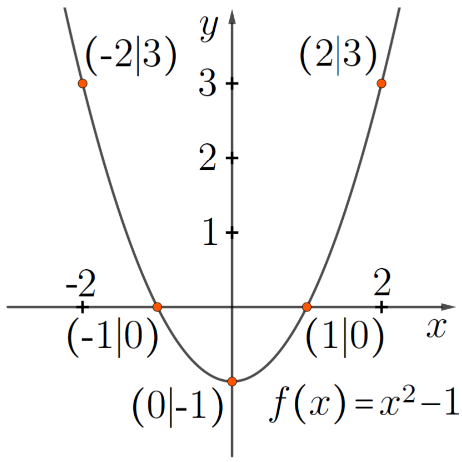
5. Durch einsetzen von $k = -\frac{2}{x}$ in die Gleichung der berechneten y-Variable $y = -\frac{4}{k} - 2$ erhält man die gesuchte Ortslinie:

$$y = -\frac{4}{-\frac{2}{x}} - 2 \quad \Rightarrow \boldsymbol{Ortslinie:}\ \boldsymbol{y = 2x - 2}$$

1.24 Funktion zeichnen oder skizzieren

Ist die Aufgabenstellung eine Funktion $f(x)$ zu zeichnen oder zu skizzieren, ist **höchste zeichnerische Präzision und Aufmerksamkeit** angesagt. Zunächst gilt es sich einen Überblick zu verschaffen, welcher Bereich auf der x-Achse „darstellerisch relevant" ist für die Funktion $f(x)$. Oft ist in der Aufgabenstellung dafür ein expliziter Definitionsbereich angegeben (z.B. $-3 \leq x \leq 3$) oder ein bestimmter „Zeitraum für $f(t)$" z.B. $t = 30$ min $\Rightarrow 0 \leq t \leq 30$). Wenn kein expliziter Definitionsbereich angegeben ist, so gilt es aus der Aufgabenstellung herauszulesen, welcher Bereich „von Interesse" ist. Ist in der Aufgabenstellung ausschließlich die Funktion $f(x)$ gegeben, so spielt sich der Definitionsbereich meist in einem „kleinen Bereich" ab (z.B. $-4 \leq x \leq 4$).

Sowohl beim Skizzieren als auch beim Zeichnen einer Funktion bietet es sich an die **Wertetabelle** für den „relevanten" Definitionsbereich einer Funktion $f(x)$ über den Taschenrechner anzeigen zu lassen (Tabelle der x- und zugehörigen y-Werte von $f(x)$). Darf kein Taschenrechner verwendet werden, so fertigt man die Wertetabelle per Hand an und setzt dafür die x-Werte des „relevanten" Definitionsbereichs in die Funktion $f(x)$ ein und berechnet die zugehörigen y-Werte. Anschließend zeichnet man die Punkte $(x|y)$ in ein Koordinatensystem ein, dessen Koordinatenachsen an die x- und y-Werte in der Wertetabelle angepasst ist. Schließlich verbindet man die Punkte **funktionsgetreu** (d.h. ohne Ecken!) miteinander und erhält den Graphen der Funktion $f(x)$.



Beispiel. Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ in dem Bereich $-2 \leq x \leq 2$:

Wertetabelle:

x-Wert	-2	-1	0	1	2
$f(x) \Rightarrow y$-Wert	$f(-2) = 3$	$f(-1) = 0$	$f(0) = -1$	$f(1) = 0$	$f(2) = 3$

Einzeichnen der Punkte $(x|y)$ der Wertetabelle in ein, die Achsen den x- und y-Werten angepasstes, Koordinatensystem und anschließendes **funktionsgetreues** verbinden der Punkte liefert das obige Schaubild.

Hinweis: Das **Beschriften der Achsen ist wichtig!** Beim Skizzieren einer Funktion muss nicht exakt jeder Punkt eingezeichnet werden. Es geht darum die charakteristischen Eigenschaften (wie Funktionsverlauf, Nullstellen, Extrem- sowie Wendepunkte) grafisch darzustellen.

1.25 ln-Regeln

Seien a und b beliebige Zahlen/Variablen. Die Rechenregeln für den ln( ) sind folgende:

1. $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

2. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

3. $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

Außerdem zu merken ist, dass:

$$e^{\ln(a)} = a$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln(1) = 0$$

Beispiel.
$\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$
$\ln(\frac{1}{5}) = \ln(1) - \ln(5) = 0 - \ln(5) = -\ln(5)$
$\ln(x^4) = 4\ln(x)$
$\ln(e^{3x}) = 3x\ln(e) = 3x \cdot 1 = 3x$
$\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(x)$
$e^{\ln(2)} = 2$

1.26 Potenzregeln

Seien a, b und n beliebige Zahlen/Variablen. Die Potenzregeln sind:

1. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ **Beispiel:** $x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$

2. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ **Beispiel:** $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ **Beispiel:** $4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3 = 20^3 = 8000$

4. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ **Beispiel:** $\frac{8^4}{4^4} = (\frac{8}{4})^4 = 2^4 = 16$

5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ **Beispiel:** $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

6. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ **Beispiel:** $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

7. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ **Beispiel:** $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

8. $\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$ **Beispiel:** $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$

2 Geometrie

2.1 LGS - Lineares Gleichungssystem

Um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, gibt es 3 gängige Verfahren: Das Einsetzungs- (nur bei 2 gesuchten Variablen), das Additions- und das Gaußverfahren.

Einsetzungsverfahren: Sind nur 2 Variablen in einem linearen Gleichungssystem zu lösen, bietet das Einsetzungsverfahren eine einfache Möglichkeit. Hierbei wird zunächst eine Gleichung nach einer der beiden gesuchten Variablen aufgelöst und anschließend in die andere Gleichung eingesetzt. Diese Gleichung hat nun nur noch eine Variable und wird nach dieser aufgelöst. Das Ergebnis dieser Variable setzt man wiederum in egal welche Gleichung ein und bestimmt damit das Ergebnis der anderen gesuchten Variable. Beispiel:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 \\ x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

1. Löse die 2. Gleichung nach x auf (Es bietet sich diese Wahl an, da hier x bereits „alleine"/ohne Faktor steht. Man kann aber genauso die 1. Gleichung nach x auflösen):

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 \qquad \mid -3y \\ x &= 15 - 3y \end{aligned}$$

2. Setze dieses $x = 15 - 3y$ in die 1. Gleichung ein und löse nach y auf:

$$\begin{aligned} -3x + 2y &= -1 \qquad \mid x = 15 - 3y \\ -3(15 - 3y) + 2y &= -1 \\ -45 + 9y + 2y &= -1 \qquad \mid +45 \\ 11y &= 44 \qquad \mid :11 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

3. Setze dieses $y = 4$ in die 1. oder 2. Gleichung ein und löse nach x auf:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 15 \qquad \mid y = 4 \\ x + 3 \cdot 4 &= 15 \\ x + 12 &= 15 \qquad \mid -12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

2.1.1 Additionsverfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 Variablen zu lösen, bietet das Additionsverfahren eine Möglichkeit. Hierbei werden zunächst die 3 Gleichungen untereinander nummeriert hingeschrieben (römische Zahlen, normale Zahlen ganz egal). Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + y - 5z = 2 \\ \mathrm{II} & -2x + y - 2z = -4 \\ \mathrm{III} & -x + y + z = 2 \end{array}$$

1. Schritt: Ziel ist es, die 3 Gleichungen so miteinander zu addieren, dass eine Variable wegfällt und man danach 2 Gleichungen mit nur noch 2 Variablen erhält. Je nachdem welche Variable man im ersten Schritt eliminieren möchte, muss man dafür als Erstes einzelne Gleichungen mit einem Faktor (einer Zahl) multiplizieren, damit bei Addition der Gleichungen auch tatsächlich diese Variable verschwindet. Im obigen Beispiel bietet es sich an, die Variable x zu eliminieren, indem man die $\mathrm{I}+\mathrm{III}$ Gleichung rechnet ($\Rightarrow$ ergibt Gleichung IV) und danach die I Gleichung mit 2 multipliziert und anschließend mit der II Gleichung addiert (also $2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} \Rightarrow$ ergibt Gleichung V):

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\mathrm{I} & x & + & y & - & 5z & = & 2 \\
\mathrm{II} & -2x & + & y & - & 2z & = & -4 \\
\mathrm{III} & -x & + & y & + & z & = & 2 \\
\hline
\mathrm{IV: I+III} & \multicolumn{7}{l}{x+(-x)+y+y-5z+z=2+2} \\
\mathrm{IV} & \multicolumn{7}{l}{2y-4z=4} \\
\hline
\mathrm{I} & x & + & y & - & 5z & = & 2 \;|\cdot 2 \\
2\cdot\mathrm{I} & 2x & + & 2y & - & 10z & = & 4 \\
\mathrm{II} & -2x & + & y & - & 2z & = & -4 \\
\hline
\mathrm{V:}\ 2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} & \multicolumn{7}{l}{2x+(-2x)+2y+y-10z+(-2z)=4+(-4)} \\
\mathrm{V} & \multicolumn{7}{l}{3y-12z=0} \\
\hline
\end{array}
$$

2. Schritt: Nun hat man 2 Gleichungen (IV und V) mit nur noch 2 Variablen (y und z). Ziel ist es, die 2 Gleichungen wieder so miteinander zu addieren, dass eine weitere Variable wegfällt und man danach 1 Gleichung mit nur noch 1 Variable erhält. Damit die Variable y in den Gleichungen IV und V bei der Addition eliminiert wird, sucht man zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache der Faktoren 2 und 3, welches 6 ist. Somit wird die Gleichung IV mit 3 multipliziert und die Gleichung V mit -2. **Minus** 2 deshalb, damit bei der Addition der beiden Gleichungen die y-Variable eliminiert wird:

$$
\begin{array}{crcrcl}
\mathrm{IV} & 2y & - & 4z & = & 4 \;|\cdot 3 \\
3\cdot\mathrm{IV} & 6y & - & 12z & = & 12 \\
\mathrm{V} & 3y & - & 12z & = & 0 \;|\cdot(-2) \\
(-2)\cdot\mathrm{V} & -6y & + & 24z & = & 0 \\
\hline
3\cdot\mathrm{IV}+(-2)\cdot\mathrm{V}: & \multicolumn{5}{l}{6y-6y-12z+24z=12+0} \\
 & \multicolumn{5}{l}{\quad 12z=12 \quad |:12} \\
 & \multicolumn{5}{l}{\quad\quad z=1}
\end{array}
$$

3. Schritt: Nachdem eine Variable gelöst ist (in dem Fall z), werden die restlichen Variablen (x und y) durch „rückwärtseinsetzen“ in die vorherigen Gleichungen berechnet. Man kann $z=1$ entweder in die Gleichung IV oder V einsetzen und diese anschließend nach y auflösen. Die Variable x erhält man, indem $z=1$ und das berechnete y in eine der Gleichungen I, II oder III eingesetzt werden und diese anschließend nach x aufgelöst wird:

$$\begin{array}{rrl} z=1 \text{ in V}: & 3y \quad -12z = 0 & \mid z=1 \\ & 3y - 12\cdot 1 = 0 & \mid +12 \\ & 3y = 12 & \mid :3 \\ & y = 4 & \\ \hline y=4 \text{ und } z=1 \text{ in I}: & x+y \quad -5z = 2 & \mid y=4 \text{ und } z=1 \\ & x+4-5\cdot 1 = 2 & \mid +1 \\ & x = 3 & \end{array}$$

Hinweis: In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für x, y und z kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. Keine eindeutige Lösung existiert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Gleichung $0 = 0$ herauskommt. Gar keine Lösung exisitert dann, wenn nach dem 1. oder 2. Schritt durch die Addition eine Ungleichung herauskommt (z.B. $0 = 2$).

2.1.2 Gauß-Verfahren

Ist ein lineares Gleichungssystem nach 3 oder mehr Variablen zu lösen, bietet das Gaußsche Eliminationsverfahren eine Möglichkeit. Um das Gaußverfahren zu benutzen, wendet man die sogenannte Matrixschreibweise an und schreibt das Lineare Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix auf. Dafür betrachten wir nur die Koeffizienten (Zahlen) vor den Variablen im linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & x+y-5z=2 & & 1x+1y-5z=2 \\ \text{II} & -2x+y-2z=-4 & \Rightarrow & -2x+1y-2z=-4 \\ \text{III} & -x+y\ +z=2 & & -1x+1y+1z=2 \end{array}$$

und übertragen diese in die Matrix. Die Werte der rechten Seite der Gleichungen (hier 2, -4 und 2) werden auch in die Matrix, in die rechte Seite hinter dem Strich, übertragen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ziel ist es nun durch umformen und addieren von Zeilen die Matrix in folgende Form zu bekommen, sodass nur noch **1en auf der Diagonalen** stehen und ansonsten **0en**. Die Zahlen, welche dann am Ende (sobald diese Form erreicht wurde) auf der rechten Seite von dem Strich stehen, geben uns dann direkt die Lösungen für die gesuchten Variablen an. Deutlich wird das, indem man die Matrix wieder in Gleichungen umschreibt, z.B.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{cccccc} 1\cdot x & +0\cdot y & +0\cdot z & = & 3 \\ 0\cdot x & +1\cdot y & +0\cdot z & = & 4 \\ 0\cdot x & +0\cdot y & +1\cdot z & = & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} x & = & 3 \\ y & = & 4 \\ z & = & 1 \end{array}$$

Damit nun diese „Ziel“-Form der Matrix erreicht wird, werden nun nacheinander Additionen und Umformungen von Zeilen durchgeführt, in der Reihenfolge, dass **zuerst unterhalb der Diagonalen** 0en entstehen und **danach oberhalb der Diagonalen**. Die Reihenfolge der Stellen in der Matrix, für welche man eine 0 „schafft “, ist im Folgenden mit einem gelben Hintergrund gekennzeichnet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 3 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \\ |\cdot(-3) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-2) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:6 \\ |:24 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 10 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ |:10 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |:(-2) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1. Hinweis: Um immer die „Ziel“-Form der Matrix zu erreichen, wird es in manchen Fällen nötig sein, Zeilen innerhalb der Matrix zu vertauschen. Das ist ohne weiteres möglich! Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

2. Hinweis: In obigem Beispiel hat das lineare Gleichungssystem **genau eine** Lösung (für x, y und z kamen eindeutige Werte heraus). Ein lineares Gleichungssystem kann allerdings auch **keine eindeutige Lösung** (also **unendlich viele** Lösungen) oder **gar keine** Lösung besitzen. Keine eindeutige Lösung existiert dann, wenn in einer Zeile der Matrix (vor oder nach einem „Rechenschritt") nur 0en stehen. Gar keine Lösung exisitert dann, wenn in einer Zeile der Matrix (vor oder nach einem „Rechenschritt") auf der linken Seite des senkrechten Strichs nur 0en stehen und auf der rechten Seite eine beliebige Zahl (denn dann liegt eine falsche Aussage vor!). Beispiel:

Keine eindeutige Lösung:

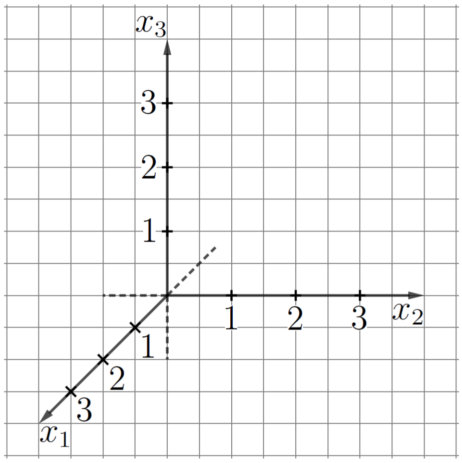
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Keine Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

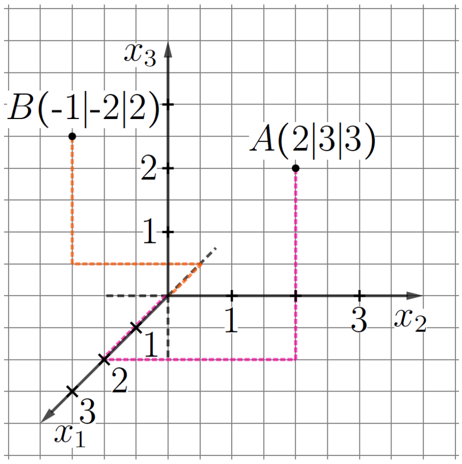
2.2 3D-Koordinatensystem

Um einen 3-dimensionalen Raum darstellen zu können, kommt eine 3. Achse im 3D-Koordinatensystem hinzu. Das 3D-Koordiantensystem besteht aus einer x_1-, x_2− und einer x_3-Achse. Im 2D-Koordinatensystem mit einer x- und y-Achse kann man sich nur nach oben/unten auf der y-Achse und seitwärts auf der x-Achse bewegen. Im 3D- Koordinatensystem kann man sich neben oben/unten auf der x_3-Achse und seitwärts auf der x_2-Achse auch in die Tiefe (3e-Dimension) auf der x_1-Achse bewegen.



Die Schreibweise für Punkte in diesem Koordinatensystem ist: $\boldsymbol{P\,(x_1|x_2|x_3)}$. Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Vektoren **waagrecht** aufgeschrieben.

Wie man Punkte in das 3D-Koordinatensystem einzeichnet, ist am Beispiel von 2 Punkten $A(2|3|3)$ und $B(\text{-}1|\text{-}2|2)$ im rechten Schaubild dargestellt. Die farbigen Linien starten im Ursprung und beschreiben jeweils mithilfe der Punktkoordinaten den Weg, der zum Standort des Punktes im 3D-Koordinatensystem führt.



Beispiel Standortbestimmung Punkt $A(2|3|3)$: Man startet im Ursprung geht +2 Einheiten nach vorne auf der x_1-Achse, geht danach +3 Einheiten nach rechts in Richtung der x_2- Achse und schließlich +3 Einheiten nach oben in Richtung der x_3-Achse.

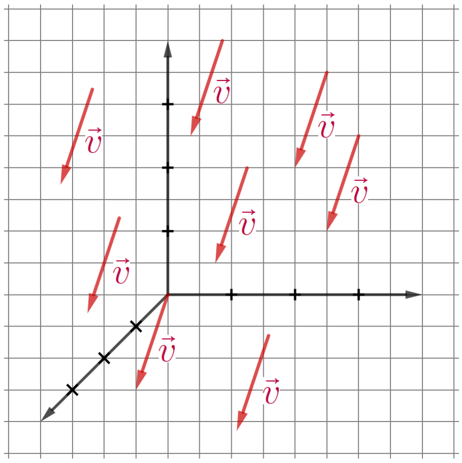
2.3 Vektoren

Vektoren im 3-dimensionalen Raum sind „Pfeile“, die eine bestimmte Länge und Richtung haben. Die Schreibweise für Vektoren ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

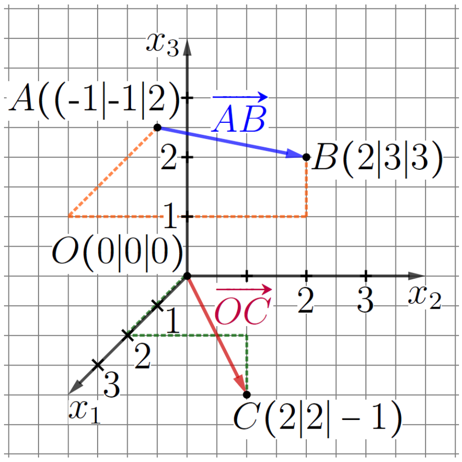
Die Koordinaten werden im Gegensatz zu Punkten **senkrecht** aufgeschrieben.

Ein Vektor ist **nur** durch seine Länge und Richtung bestimmt, er ist **nicht** ortsgebunden. Das heißt ein Vektor kann sich überall im Raum befinden. Im rechten Schaubild sind alle dargestellten Vektoren ein und derselbe Vektor $\vec{v}$. Sie haben alle dieselbe Länge und Richtung, sie sind nur unterschiedlich im Raum positioniert. Man kann also einen Vektor beliebig im Raum verschieben.



Ein Vektor der durch 2 Punkte A und B definiert ist, hat die Schreibweise $\overrightarrow{AB}$. Dabei zeigt die Reihenfolge der Buchstaben $\overrightarrow{AB}$ an, von welchem Punkt zu welchem Punkt der Vektor verläuft (also die Richtung des Vektors). Bei dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ verläuft der Vektor vom Punkt A zum Punkt B, der Vektor $\overrightarrow{BA}$ verläuft andersherum vom Punkt B zum Punkt A.

Die Berechnung eines Vektors zwischen 2 Punkten erfolgt, indem die einzelnen Koordinaten des „Endpunkts“ **Minus** die Koordinaten des „ Startpunkts“ gerechnet werden. Im Beispiel im rechten Schaubild berechnet sich also der Vektor $\overrightarrow{AB}$ zwischen dem „Startpunkt“ $A(-1|-1|2)$ und dem „ Endpunkt“ $B(2|3|3)$ folgendermaßen:



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 3-(-1) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

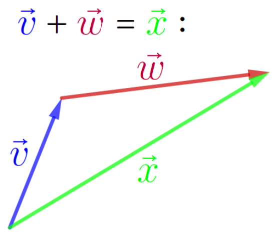
Die orangefarbene Linie startet im Punkt A und beschreibt mithilfe der Vektorkoordinaten von $\overrightarrow{AB}$ den Weg, der zum Punkt B mithilfe des Vektors $\overrightarrow{AB}$ im 3D-Koordinatensystem führt. Der Vektor $\overrightarrow{OC}$ ist ein sogenannter **Ortsvektor**.

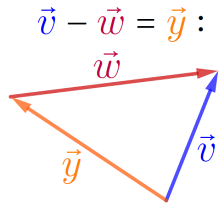
Ortsvektoren sind Vektoren, deren „Startpunkt“ **immer** der Ursprung $O(0|0|0)$ ist und der „Endpunkt“ beliebig ist. Im Beispiel ist der „Endpunkt“ $C(2|2|\text{-}1)$. Die Vektorkoordinaten des Ortsvektors sind **immer** die Punktkoordinaten des „Endpunkts“. Siehe Berechnung des Ortsvektors $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} c_1 - o_1 \\ c_2 - o_2 \\ c_3 - o_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Rechnen mit Vektoren

Addiert oder subtrahiert man Vektoren miteinander entsteht ein neuer Vektor. Bei der Addition bzw. Subtraktion werden die einzelnen Vektorkoordinaten miteinander addiert bzw. subtrahiert. Im Beispiel im rechten Schaubild ist die Addition bzw. Subtraktion der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und deren Ergebnisvektoren $\vec{x}$ (bei Addition) bzw. $\vec{y}$ (bei Subtraktion) graphisch dargestellt. Bei der Addition „reiht“ man die Vektoren der Richtung entsprechend aneinander und erhält den resultierenden Ergebnisvektor. Bei der Subtraktion „reiht“ man den abgezogenen Vektor entgegen seiner Richtung an (im Beispiel $\vec{w}$). Die Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:





$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (-2) \\ 2 + \quad 6 \\ 5 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 2 - \quad 6 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

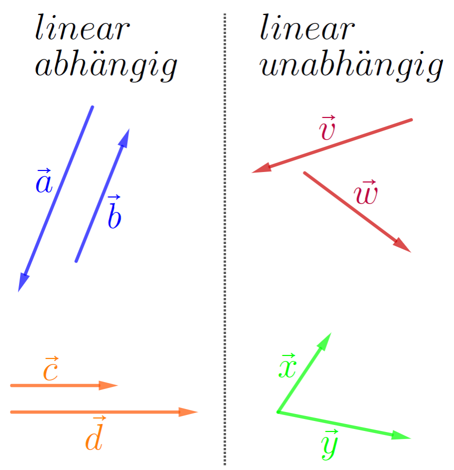
Multipliziert man einen Vektor mit einem Faktor (eine beliebige Zahl), so werden alle Vektorkoordinaten mit dem Faktor (der beliebigen Zahl) multipliziert. Graphisch gesehen wird der Vektor durch den Faktor verlängert oder verkürzt. Das Multiplizieren mit einem negativen Faktor verändert, neben der Verkürzung oder Verlängerung, die Richtung um 180°, d.h. der Vektor zeigt anschließend in die entgegengesetzte Richtung.

Beispiel.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Lineare Abhängigkeit

2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel verlaufen. Dementsprechend sind 2 Vektoren linear unabhängig, wenn sie **nicht** parallel verlaufen.



Rechnerisch lässt sich die Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von 2 Vektoren recht einfach überprüfen. 2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind, d.h. man kann die Vektoren mit einem Faktor multiplizieren und erhält den jeweils anderen Vektor. Ist das **nicht** möglich, sind die 2 Vektoren linear unabhängig.

Beispiel.

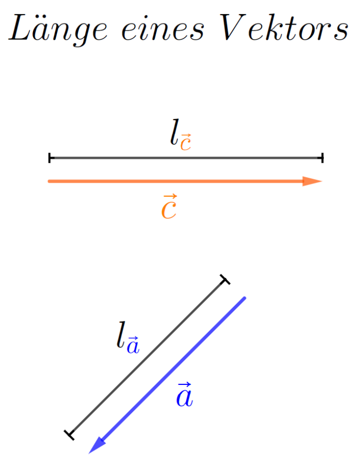
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ linear abhängig, da $-2 \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot -3 \\ -2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \vec{b}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig, da die Vektoren keine Vielfache voneinander sind

2.3.3 Länge eines Vektors

Die Länge l eines Vektors $\vec{v}$ wird durch Betragsstriche gekennzeichnet: $l_{\vec{v}} = |\vec{v}|$. Die Formel für die Berechnung der Länge eines Vektors lautet:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Beispiel. Berechne die Länge des Vektors $\vec{a}$.

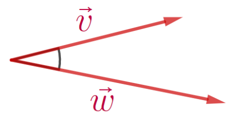
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$l_{\vec{a}} = |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

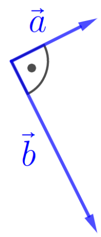
2.3.4 Skalarprodukt

Multipliziert man 2 Vektoren miteinander, erhält man das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. Die Rechenvorschrift lautet:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$



$\Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} \neq 0$



$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Merke: Ergibt das Skalarprodukt zweier Vektoren **0**, so sind diese beiden Vektoren **orthogonal** zueinander, sie haben dementsprechend einen **rechten Winkel**. Überprüfung, ob ein rechter Winkel (Orthogonalität) zwischen 2 Vektoren vorliegt, somit mithilfe des Skalarprodukts!

Beispiel. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

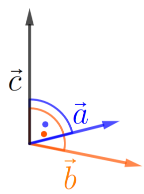
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot(-3) = 1 + 8 - 9 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind orthogonal!}$$

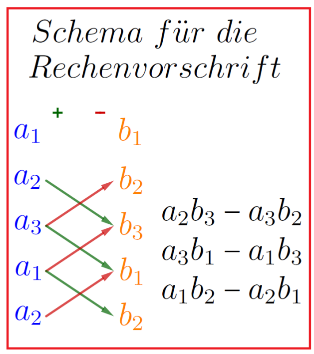
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -2\cdot 0 + 5\cdot 6 + 2\cdot(-5) = 0 + 30 - 10 = 20 \neq \mathbf{0}$$

2.3.5 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt von 2 Vektoren liefert genau den Vektor, der **senkrecht/orthogonal zu beiden** Vektoren ist. D.h. sind 2 Vektoren gegeben und man sucht den Vektor, der orthogonal zu beiden Vektoren ist, kann man das Kreuzprodukt anwenden. Die Rechenvorschrift lautet:

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$





$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel. Gesucht ist der Vektor, der orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 6 \\ 3 + 3 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vereinfache: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Man vereinfacht am Ende den Vektor und multipliziert ihn deshalb mit $\frac{1}{2}$, da mit kleineren Vektorkoordinaten einfacher zu rechnen ist und der „halbierte" Vektor immernoch dieselbe Richtung besitzt (da linear abhängig!), weshalb er immernoch orthogonal zu den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

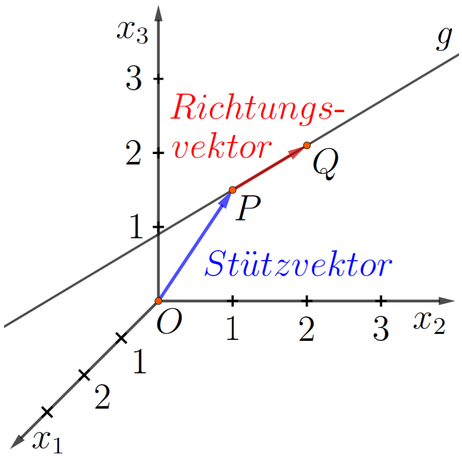
Probe mithilfe des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -9 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = -9 + 12 - 3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -9 + 2 \cdot 3 + -3 \cdot (-1) = -9 + 6 + 3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \text{orthogonal! } \checkmark$$

2.4 Gerade

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Gerade g in der sogenannten Parameterform aufgestellt. Hierfür bedarf es zunächst einen Stützvektor, der die Gerade g vom Ursprung O aus „stützt/fixiert". Dieser Stützvektor ist ein Ortsvektor vom Ursprung O zu einem gegebenen Punkt auf der Geraden g (Im Beispiel rechts ist der Stützvektor der Vektor $\overrightarrow{OP}$). Da die Gerade g nun durch den Stützvektor fest an einen Punkt im Raum (im Beispiel ist es der Punkt P) „fixiert" ist, bedarf es nun noch einer Vorgabe der Richtung, der die Gerade g folgt. Diese Richtung wird durch den Richtungsvektor vorgegeben, der durch zwei gegebene Punkte auf der Geraden g bestimmt wird (im Beispiel rechts ist der Richtungsvektor der Vektor $\overrightarrow{PQ}$). Allgemeine Parameterform einer Geraden g:



$$g: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + \underbrace{t}_{\text{Parameter}} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

$\vec{x}$ beschreibt alle Punkte, die auf der Geraden g liegen. Für den Parameter t, kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden. Je nachdem was für eine Zahl für den Parameter t eingesetzt wird, wird der Richtungsvektor um diesen Faktor verlängert, verkürzt oder auch um 180° in die entgegengesetzte Richtung gedreht (bei negativem Faktor) und man landet dementsprechend in einem anderen Punkt auf der Geraden g.

Beispiel. Stellen Sie die Gerade g auf, die durch die beiden Punkte $P(1|2|2)$ und $Q(-2|1|1)$ verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Geraden aus, der den Stützvektor bildet:

Wir wählen $P(1|2|2)$ $\Rightarrow$ Stützvektor: $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den Richtungsvektor von g mithilfe zweier gegebener Punkte auf der Geraden (P und Q):

Richtungsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Aufstellen der Gerade g in Parameterform:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.4.1 Geometrische Punktprobe bei Geraden

Ob ein Punkt P auf einer Geraden g liegt, wird durch die (geometrische) Punktprobe bestimmt. Dafür setzt man die Koordinaten des Punktes P in $\vec{x}$ der Geradengleichung von g ein. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so **liegt** der Punkt P **auf** der Geraden g, andernfalls liegt der Punkt P NICHT auf der Gerade$g$.

Beispiel. Liegt der Punkt $P(-1|1|4)$ auf der Geraden $g : \vec{x} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

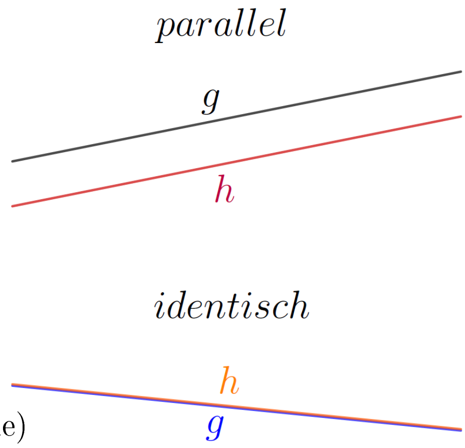
1. Einsetzen des Punktes $P(-1|1|4)$ in $\vec{x}$ der Geradengleichung von g:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl} -1 & = & -9 & + & 2t & |+9 \\ 1 & = & -3 & + & t & |+3 \\ 4 & = & -4 & + & 2t & |+4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcll} 8 & = & 2t & |:2 \\ 4 & = & t & \\ 8 & = & 2t & |:2 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{l} 4 = t \\ 4 = t \\ 4 = t \end{array} \quad \Rightarrow \text{Der Punkt } P \textbf{ liegt auf} \text{ der Geraden } g!$$

2.4.2 Lage von 2 Geraden

Parallel: 2 Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, d.h. wenn die beiden Richtungsvektoren der Geraden linear abhängig sind.



Beispiel. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind parallel, da:

$-2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Richtungsvektoren sind Vielfache)

Identisch: 2 Geraden sind identisch, wenn sie parallel sind und durch die gleichen Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden parallel sind, überprüft man ob sie identisch sind, indem man den Stützvektor einer der beiden Geraden mit der anderen Geraden gleichsetzt (in die andere Gerade einsetzt). Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit nur einer Variablen, die jeweils nach dem Parameter aufgelöst werden. Kommt bei jeder der 3 Gleichungen **dieselbe** Lösung für den Parameter heraus, so sind die Geraden identisch, andernfalls sind die 2 Geraden parallel, jedoch nicht identisch.

Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:

$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

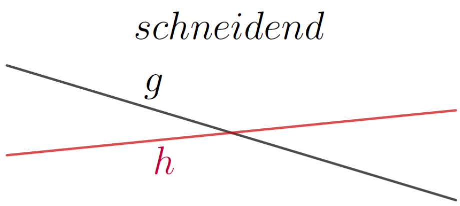
$\Rightarrow$ Richtungsvektoren sind Vielfache (linear abhängig). Somit sind die beiden Geraden g und h parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob sie identisch sind oder nicht.

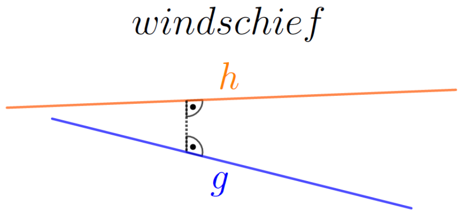
2. Gleichsetzen des Stützvektors der Geraden g mit der Geraden h:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr|l} -1 & = & -9 & + & 4s & +9 \\ 1 & = & -3 & + & 2s & +3 \\ 4 & = & -4 & + & 4s & +4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcr|l} 8 & = & 4s & :4 \\ 4 & = & 2s & :2 \\ 8 & = & 4s & :4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 2 = s \\ 2 = s \\ 2 = s \end{array} \quad \Rightarrow \text{ Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind } \textbf{identisch}!$$

Schneidend: 2 Geraden schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind und sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt schneiden. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Geraden nicht parallel sind, überprüft man ob sie sich schneiden, indem man die beiden Geraden gleichsetzt. Nun erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen mit 2 Parametern. Mithilfe der 1. und 2. Gleichung bestimmt man die Lösungen der beiden Parameter. Setzt man anschließend die Lösungen der 2 Parameter in die 3. Gleichung ein und die Gleichung ist „ wahr/stimmt“, so schneiden sich die Geraden in einem Schnittpunkt, andernfalls sind die 2 Geraden **windschief**. Die Berechnung des Schnittpunkts der beiden Geraden erfolgt durch Einsetzen der berechneten Lösung eines Parameters in die zugehörige Geradengleichung. Durch anschließendes Auflösen erhält man die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts.





Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:
$\Rightarrow$ Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden g mit der Geraden h und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccccccl} 0 & + & 3t & = & 3 & + & 1s & | -s \\ 1 & + & 4t & = & 9 & + & 0s & \\ 2 & + & 1t & = & 1 & + & 1s & | -s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccl} & & 3t & - & s & = & 3 & \\ 1 & + & 4t & & & = & 9 & | -1 \\ 2 & + & t & - & s & = & 1 & | -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccl} 3t & - & s & = & 3 & \\ 4t & & & = & 8 & | :4 \\ t & - & s & = & -1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccl} 3t & - & s & = & 3 & |t = 2 \text{ einsetzen} \\ t & & & = & 2 & \\ t & - & s & = & -1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccl} 3 \cdot 2 & - & s & = & 3 & | -6 \\ t & & & = & 2 & \\ t & - & s & = & -1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccl} & - & s & = & -3 & | \cdot (-1) \\ t & & & = & 2 & \\ t & - & s & = & -1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccccl} & & s & = & 3 & \\ t & & & = & 2 & \\ t & - & s & = & -1 & |t = 2 \text{ und } s = 3 \text{ einsetzen} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 3 \\ t & = & 2 \\ 2-3 & = & -1 \quad \checkmark \end{array} \qquad \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \textbf{ schneiden sich}!$$

3. Berechnen des Schnittpunkts durch Einsetzen von $t = 2$ in die Gerade g:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2\cdot 3 \\ 1+2\cdot 4 \\ 2+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{gemeinsamer Schnittpunkt } S(6|9|4)$$

Windschief: 2 Geraden sind windschief, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden. D.h. es gibt immer einen Abstand zwischen den beiden Geraden (z.B. verläuft die eine Gerade „höher“ als die andere, weshalb sie sich nicht schneiden). Der Nachweis erfolgt nach dem gleichen Schema, nach dem man prüft, ob sie sich schneiden. Der Unterschied ist, dass beim Einsetzen der berechneten 2 Parameter in die 3. Gleichung, die 3. Gleichung „unwahr/nicht korrekt“ ist.

Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$

1. Untersuche ob die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander sind:
$\Rightarrow$ Richtungsvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Gleichsetzen der Geraden g mit der Geraden h und ausrechnen der Parameter:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} 4 & + & 2t & = & 0 & + & 1s & |-s \\ -1 & + & 7t & = & -2 & - & 3s & |+3s \\ 2 & + & 1t & = & 3 & + & 3s & |-3s \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcrl} 4 & + & 2t & - & s & = & 0 & |-4 \\ -1 & + & 7t & + & 3s & = & -2 & |+1 \\ 2 & + & t & - & 3s & = & 3 & |-2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl} 2t & - & s & = & -4 & |-2t \\ 7t & + & 3s & = & -1 & \\ t & - & s & = & 1 & \end{array}$$

(Wir wenden hier das Einsetzungsverfahren bei der 1. und 2. Gleichung an, um s und t zu berechnen)

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrl} & & -s & = & -4-2t & |\cdot(-1) \\ 7t & + & 3s & = & -1 & \\ t & - & 3s & = & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrl} & & s & = & 4+2t & \\ 7t & + & 3s & = & -1 & |s = 4+2t \text{ einsetzen} \\ t & - & 3s & = & 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcl} & & s & = & 4+2t \\ 7t & + & 3(4+2t) & = & -1 \\ t & - & 3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} & & s & = & 4+2t \\ 7t & + & 12+6t & = & -1 \quad |-12 \\ t & - & 3s & = & 1 \end{array}$$

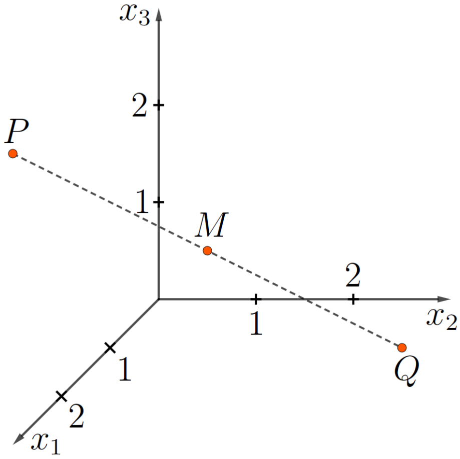
$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4+2t \\ 13t & = & -13 \quad |:13 \\ t-3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4+2t \quad |t=-1 \text{ einsetzen} \\ t & = & -1 \\ t-3s & = & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 4+2\cdot(-1) \\ t & = & -1 \\ t-3s & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \\ t-3s & = & 1 \quad |t=-1 \text{ und } s=2 \text{ einsetzen} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} s & = & 2 \\ t & = & -1 \\ -1-3\cdot 2 & \neq & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind } \textbf{windschief}!$$

2.5 Mittelpunkt einer Strecke

Die Koordinaten des Mittelpunkts M einer Strecke zwischen 2 Punkten $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ berechnen sich folgendermaßen:



$$M\left(\frac{p_1+q_1}{2}\,\middle|\,\frac{p_2+q_2}{2}\,\middle|\,\frac{p_3+q_3}{2}\right)$$

Beispiel. Gesucht ist der Mittelpunkt M der beiden Punkte $P(1|-1|2)$ und $Q(-3|1|-2)$:

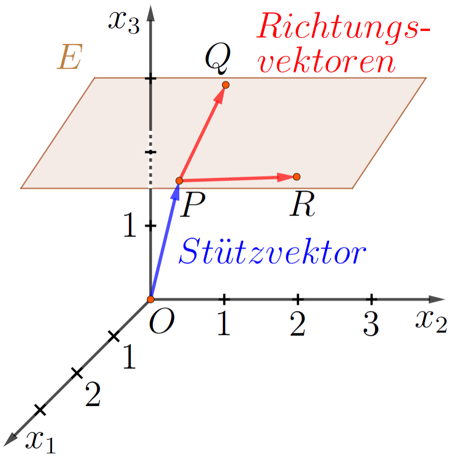
$$M\left(\frac{1+(-3)}{2}\,\middle|\,\frac{-1+1}{2}\,\middle|\,\frac{2+(-2)}{2}\right)$$

$\Rightarrow M(-1|0|0)$ ist der gesuchte Mittelpunkt

2.6 Ebene

Im 3Dimensionalen Raum wird eine Ebene E entweder in der Parameterform, Koordinatenform oder Normalenform aufgestellt.

2.6.1 Parameterform



Für die Parameterform bedarf es zunächst einen Stützvektor, der die Ebene E vom Ursprung O aus „stützt/fixiert“. Dieser Stützvektor ist ein Ortsvektor vom Ursprung O zu einem gegebenen Punkt auf der Ebene E (Im Beispiel rechts ist der Stützvektor der Vektor $\overrightarrow{OP}$). Für das weitere Verständnis der Definition der Parameterform einer Ebene stelle man sich vor, die Aufgabe ist es eine Platte (Ebene E) fest mitten in einem Raum zu platzieren. Bisher liegt die Platte nur auf einem im Boden fest verankerten „Stab“ (dem Stützvektor) auf, weshalb sie noch sehr instabil ist und in alle Richtungen kippen kann. Eine erste Stütze/Fixierung wird durch das Anbringen einer Stange am Ende des Stabes geschaffen (dem 1. Richtungsvektor, im Beispiel rechts $\overrightarrow{PQ}$). Nun kann die Platte nur noch um die Achse der Stange seitlich wegkippen. Damit die Platte also fest im Raum fixiert ist, benötigen wir noch eine weitere Stange auf der die Platte aufliegt (dem 2. Richtungsvektor, im Beispiel rechts $\overrightarrow{PR}$). Wichtig ist, dass die beiden Richtungsvektoren linear unabhängig sind. Allgemeine Parameterform einer Ebene E:

$$E: \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{Stützvektor} + \underbrace{s}_{Parameter} \cdot \underbrace{\vec{r}}_{Richtungsvektor} + \underbrace{t}_{Parameter} \cdot \underbrace{\vec{u}}_{Richtungsvektor}$$

$\vec{x}$ beschreibt alle Punkte, die auf der Ebene E liegen. Für die Parameter s und t, kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden.

Beispiel. Stellen Sie die Ebene E in Parameterform auf, die durch die Punkte $P(2|\text{-}1|1)$, $Q(1|0|3)$ und $R(0|2|\text{-}1)$ verläuft.

1. Suche einen Punkt auf der Ebene aus, der den Stützvektor bildet:

Wir wählen $P(2|\text{-}1|1)$ $\Rightarrow$ Stützvektor: $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Berechne die beiden Richtungsvektoren von E mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene (P, Q und R):

1. Richtungsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

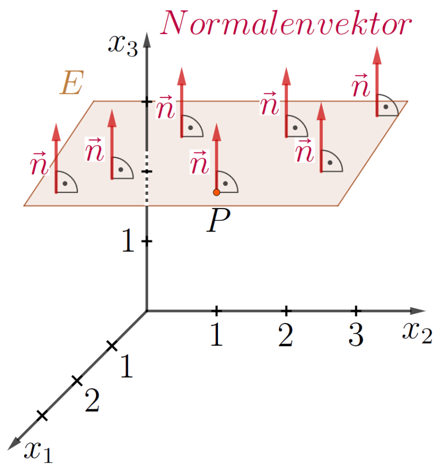
2. Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-(-1) \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Aufstellen der Ebene E in Parameterform:

$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.6.2 Koordinatenform

Für die Koordinatenform bedarf es einen Punkt P auf der Ebene E und den sogenannten Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Der Normalenvektor $\vec{n}$ hat die Eigenschaft, dass er orthogonal (im rechten Winkel) auf der Ebene E steht. Muss der Normalenvektor $\vec{n}$ berechnet werden, erfolgt dies durch das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{u}$ aus der Parameterform:



$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene E ist:

$$E:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$$

Das b berechnet man, indem in die Gleichung für x_1, x_2 und x_3 die Punktkoordinaten des Punktes P eingesetzt werden. Ergebnis ist das b. Alle Punkte deren Koordinaten $(x_1|x_2|x_3)$ die Gleichung erfüllen, definieren die Ebene E (liegen drauf).

Beispiel. Stellen Sie die Ebene E in Koordinatenform auf, die durch die Punkte P(2|-1|1), Q(1|0|3) und RC(0|2|-1) verläuft.

1. Berechne 2 Richtungsvektoren von E mithilfe dreier gegebener Punkte auf der Ebene (P, Q und R) um den Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen zu können:

1. Richtungsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-(-1) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Richtungsvektor: $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-(-1) \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne den Normalenvektor $\vec{n}$ mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{u}$:

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 3 - 1 \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ -4 - 2 \\ -3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Vereinfache: } -1 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

3. Berechne das b für die Koordinatenform mit einem Punkt der Ebene E und dem Normalenvektor $\vec{n}$:
Wir setzen $P(2|\text{-}1|1)$ in die Gleichung ein: $8 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 11 = b$

4. Aufstellen der Ebene E in Koordinatenform:
$E:\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 = 11$

2.6.3 Normalenform

Für die Koordinatenform bedarf es einen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ auf der Ebene E und den sogenannten Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E. Die Berechnung des Normalenvektors $\vec{n}$ erfolgt nach derselben Vorgehensweise wie bei der Koordinatenform. Die allgemeine Normalenform einer Ebene E ist:

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Alle Punkte deren Koordinaten $(x_1|x_2|x_3)$ die Gleichung erfüllen, definieren die Ebene E (liegen drauf).

Beispiel. Schreiben Sie die Ebene $E: 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -6$ in Normalenform auf.

1. Ablesen des Normalenvektors $\vec{n}$ aus der Koordinatenform:

$$E: 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = -6 \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

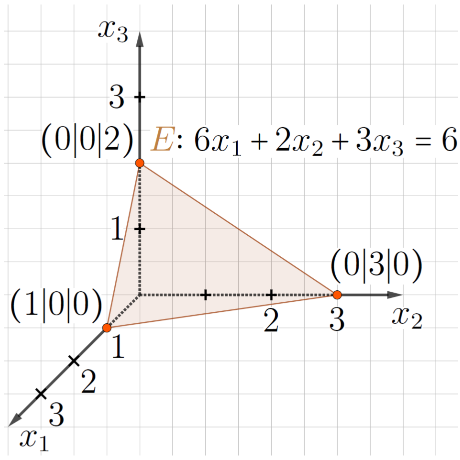
2. Suche einen Punkt P auf der Ebene E mithilfe der Koordinatenform. Auf der rechten Seite der Gleichung muss -6 rauskommen. Überlege für welche Koordinaten man eine 0 einsetzt und für welche Koordinate eine Zahl, damit man einen möglichst „einfachen" Punkt findet, für den -6 rauskommt. Setze $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$:
$E: 3 \cdot (-2) - 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = -6$ ✓ $\quad \Rightarrow$ Der Punkt $P(-2|0|0)$ liegt auf E

3. Aufstellen der Ebene E in Normalenform:

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

2.6.4 Ebene in Koordinatensystem einzeichnen

Um eine Ebene E in ein 3D-Koordinatensystem einzeichnen zu können, bringt man diese zunächst in Koordinatenform. Aus der Koordinatenform lassen sich die sogenannten **Spurpunkte**, (das sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen) berechnen. Um den Spurpunkt auf der jeweiligen Koordinatenachse (x_1-, x_2- und x_3-Achse) zu bestimmen, setzt man in der Koordinatenform jeweils für die anderen beiden Koordinaten 0 ein und errechnet die Zahl, bei der die Ebene die jeweilige Koordinatenachse schneidet. Am Ende zeichnet man die Spurpunkte in das Koordinatensystem ein, verbindet diese miteinander und erhält die Ebene.



Beispiel. Zeichnen Sie die Ebene E: $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ in ein Koordinatensystem.

1. Bestimmen der Spurpunkte auf der x_1-, x_2- und x_3-Achse:
Spurpunkt auf der x_1-Achse: Setze in der Koordinatenform $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ und berechne x_1:
$6x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6 \mid : 6 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \quad \Rightarrow$ 1. Spurpunkt $(1|0|0)$

Spurpunkt auf der x_2-Achse: Setze in der Koordinatenform $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ und berechne x_2:
$6 \cdot 0 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 6 \mid : 2 \quad \Rightarrow x_2 = 3 \quad \Rightarrow$ 2. Spurpunkt $(0|3|0)$

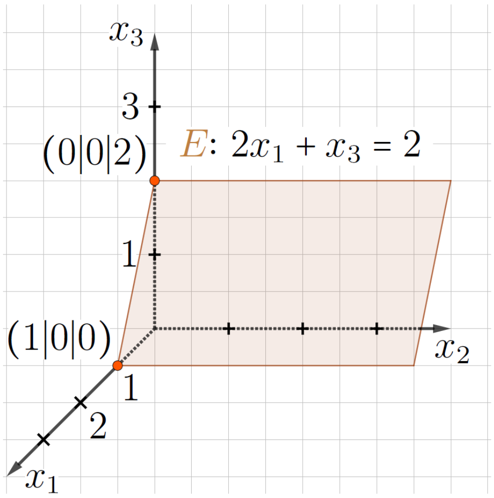
Spurpunkt auf der x_3-Achse: Setze in der Koordinatenform $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ und berechne x_3:
$6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3x_3 = 6 \mid : 3 \quad \Rightarrow x_3 = 2 \quad \Rightarrow$ 3. Spurpunkt $(0|0|2)$

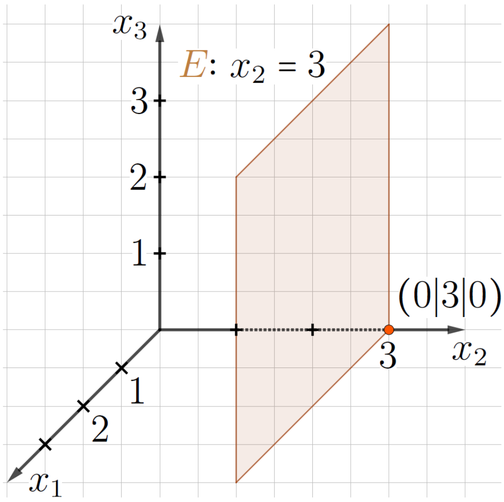
2. Trage die 3 Spurpunkte in das Koordinatensystem ein und verbinde diese miteinander (siehe Abbildung oben).

Nicht jede Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen. Beispielsweise können Ebenen auch parallel zu einer oder zwei der Koordinatenachsen verlaufen. Man erkennt diese Ebenen daran, dass in der Koordinatenform ein oder zwei der Koordinaten (x_1, x_2 oder x_3) „fehlen“. Zu diesen „fehlenden“ Koordinatenachsen verläuft die Ebene parallel.

Dementsprechend erhält man bei der Berechnung der Spurpunkte nur zwei Lösungen (Ebene verläuft parallel zu **einer Koordinatenachse**) oder nur eine einzige Lösung (Ebene verläuft parallel zu **zwei Koordinatenachsen**). Beim Zeichnen solcher Ebenen geht man folgendermaßen vor.

Im Falle, dass die Ebene parallel zu **einer Koordinatenachse** verläuft, verbindet man die beiden berechneten Spurpunkte auf den anderen beiden Koordinatenachsen miteinander und zeichnet von beiden Spurpunkten aus jeweils eine Linie, die parallel zu der „fehlenden" Koordinatenachse ist. Die Enden der beiden gleichlangen Linien verbindet man schließlich miteinander und erhält die Ebene als Parallelogramm (siehe linke untere Abbildung).
Im Falle, dass die Ebene parallel zu **zwei Koordinatenachsen** verläuft, zeichnet man von dem einzigen berechneten Spurpunkt zwei Linien, die jeweils parallel zu einer der beiden „fehlenden" Koordinatenachsen sind. Diese beiden Linien werden schließlich zu einem Parallelogramm ergänzt, das die Ebene darstellt (siehe rechte untere Abbildung).

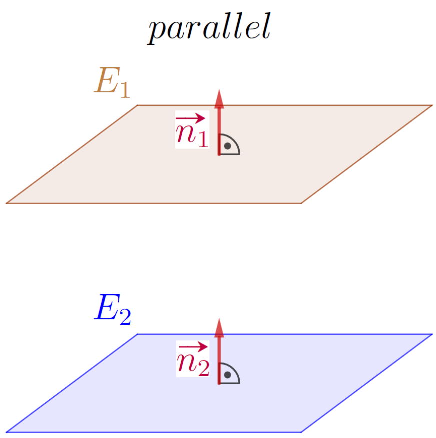




2.6.5 Lage von 2 Ebenen

Hinweis: Um die Lage von 2 Ebenen rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die beiden Ebenen zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

Parallel: 2 Ebenen E_1 und E_2 sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren n_1 und n_2 Vielfache voneinander sind, d.h. die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig.

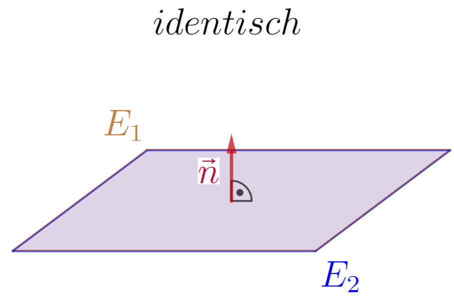


Beispiel. $E_1 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$ und
$E_2 : 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 4$ sind parallel, da:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$ (Normalenvektoren sind Vielfache)

Identisch:

2 Ebenen E_1 und E_2 sind identisch, wenn sie parallel sind und durch dieselben Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Ebenen parallel sind, überprüft man ob sie identisch sind, indem die beiden Ebenengleichungen per Additionsverfahren miteinander verrechnet werden. Da die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind, sind nach dem 1. Schritt des Additionsverfahrens alle Variablen (x_1, x_2 und x_3) eliminiert. Ist die nach dem 1. Schritt „entstandene“ Gleichung „wahr“, so sind die beiden Ebenen identisch, andernfalls sind die 2 Ebenen parallel, jedoch nicht identisch.



Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der Ebenen $E_1: 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$ und $E_2: -8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -10$?

1. Untersuche ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

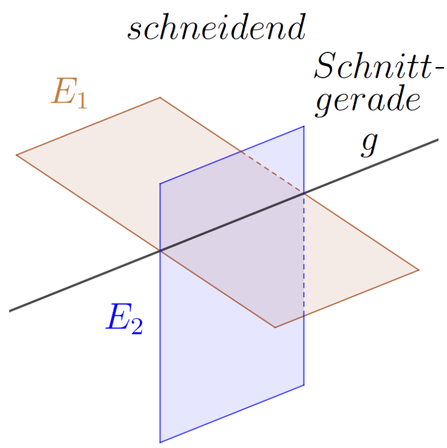
⇒ Normalenvektoren sind Vielfache (linear abhängig). Also sind E_1 und E_2 parallel.

2. Schreibe die beiden Ebenengleichungen übereinander und wende den 1. Schritt des Additionsverfahrens an (Eliminiere die Variable x_1):

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} \text{I} & 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 5 & \mid \cdot 2 \\ \text{II} & -8x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & -10 & \xleftarrow{+} \\ \hline \text{III: } 2\cdot\text{I}+\text{II} & \multicolumn{8}{l}{2\cdot 4x_1 - 8x_1 + 2\cdot(-2x_2) + 4x_2 + 2\cdot(-3x_3) + 6x_3 = 2\cdot 5 - 10} \\ \text{III} & \multicolumn{8}{l}{0 = 0} \end{array}$$

⇒ Die Gleichung III: $0 = 0$ ist „wahr“, somit sind die Ebenen E_1 und E_2 **identisch**!

Schneidend: 2 Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich **immer** in einer Schnittgerade g, wenn sie **nicht parallel** sind. Nachdem festgestellt wurde, dass die 2 Ebenen nicht parallel sind, kann man die Schnittgerade g berechnen, indem die beiden Ebenengleichungen per Additionsverfahren miteinander verrechnet werden. Nach dem 1. Schritt des Additionsverfahrens erhält man eine Gleichung mit 2 Variablen. Für eine dieser beiden Variablen setzt man einen Parameter t ein (wenn möglich $x_3 = t$). Anschließend berechnet man die anderen beiden Variablen in Abhängigkeit dieses Parameters t und kann schließlich die Schnittgerade in Parameterform aufstellen. Siehe dazu folgendes Beispiel.



Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der Ebenen
$E_1: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 7$ und $E_2: -x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$?

1. Untersuche ob die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache voneinander sind:
$\Rightarrow$ Normalenvektoren sind keine Vielfache, somit keine Parallelität vorhanden.

2. Schreibe die beiden Ebenengleichungen übereinander und wende den 1. Schritt des Additionsverfahrens an (Eliminiere die Variable x_1):

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \\ \text{II} & -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \mid \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III: I} + 2 \cdot \text{II} & 2x_1 + 2 \cdot (-x_1) + 3x_2 + 2 \cdot (-x_2) - 4x_3 + 2 \cdot 3x_3 = 7 + 2 \cdot (-2) \\ \text{III} & x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

3. Setze $x_3 = t$ und berechne damit x_2 und x_1 in Abhängigkeit von t:
$\Rightarrow x_3 = t$
Setze $x_3 = t$ in Gleichung III ein und berechne x_2 in Abhängigkeit von t:

$$\begin{aligned} \text{III } x_2 + 2x_3 &= 3 \mid x_3 = t \\ x_2 + 2t &= 3 \mid -2t \\ x_2 &= 3 - 2t \end{aligned}$$

Setze $x_3 = t$ und $x_2 = 3 - 2t$ in Gleichung I oder II ein und berechne x_1 in Abhängigkeit von t:

$$\begin{aligned} \text{II} \quad -x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 && \mid x_3 = t \text{ und } x_2 = 3 - 2t \\ -x_1 - (3 - 2t) + 3t &= -2 \\ -x_1 - 3 + 2t + 3t &= -2 && \mid +3 \\ -x_1 + 5t &= 1 && \mid -5t \\ -x_1 &= 1 - 5t && \mid \cdot(-1) \\ x_1 &= -1 + 5t \end{aligned}$$

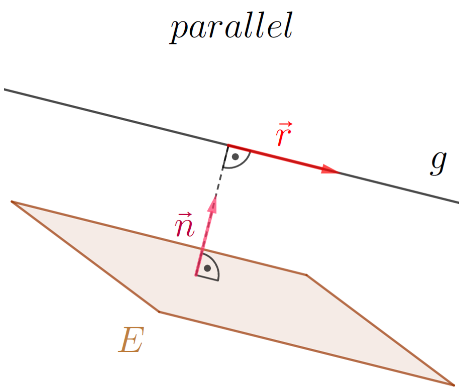
4. Aufstellen der Schnittgerade g in Parameterform mithilfe der berechneten Variablen x_1, x_2 und x_3 in Abhängigkeit von t. Die „alleinstehende“ Zahl „ohne“ t gibt die jeweilige Koordinate des Stützvektors an, während die Zahl vor t die jeweilige Koordinate des Richtungsvektors angibt. Mit diesen beiden Vektoren stellt man die Parameterform der Schnittgerade g schließlich auf:
$x_1 = -1 + 5t$
$x_2 = 3 - 2t$
$x_3 = 0 + 1t$

$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die Schnittgerade von E_1 mit E_2.

2.7 Lage von Gerade und Ebene

Hinweis: Um die Lage zwischen einer Geraden und Ebene rechnerisch zu ermitteln, ist es am einfachsten man bringt die Ebene zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

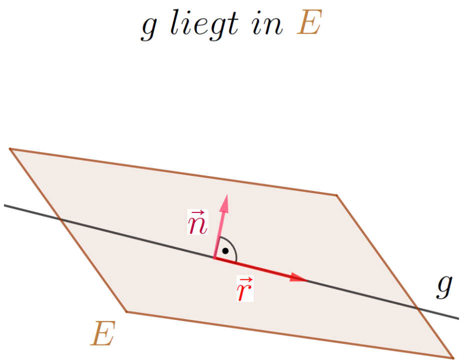
Parallel: Eine Ebene E und eine Gerade g sind parallel, wenn der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E im rechten Winkel (orthogonal) zu dem Richtungsvektor $\vec{r}$ der Gerade g verläuft. Rechnerisch lässt sich das mit dem Skalarprodukt bestimmen. Wenn also das Skalarprodukt des Normalenvektors $\vec{n}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{r}$ **NULL** ergibt, so verlaufen E und g parallel zueinander: $\vec{n} \cdot \vec{r} = \mathbf{0}$.



Beispiel. $E: 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$ und
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ sind parallel, da:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 = -2 + 8 - 6 = \mathbf{0}$$ ($\vec{n}$ und $\vec{r}$ sind orthogonal)

***g* liegt in *E*:** Eine Ebene E und eine Gerade g sind identisch, wenn sie parallel sind und durch dieselben Punkte verlaufen. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade parallel sind, überprüft man ob g in E liegt, indem der Stützvektor der Geraden g in die Ebenengleichung eingesetzt wird. Ist die Ebenengleichung nach Einsetzen des Stützvektors „wahr“, so liegt g in E, andernfalls sind sie parallel.



Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der
Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$?

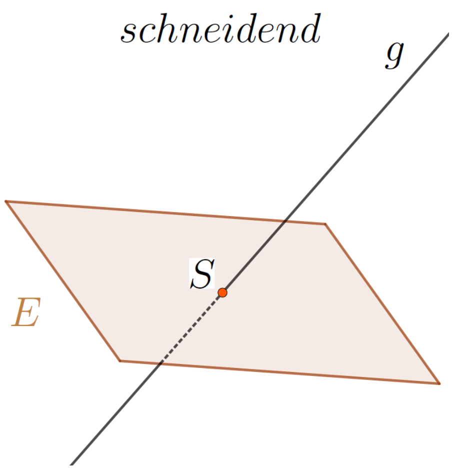
1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 8 = 12 + 4 - 16 = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ Die Ebene E und die Gerade g sind parallel. Es gilt nun noch herauszufinden, ob g in E liegt oder nicht.

2. Einsetzen des Stützvektors der Geraden g in die Ebenengleichung von E:
$3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 8$
$-6 + 12 + 2 = 8$
$8 = 8$
$\Rightarrow$ Die Gleichung $8 = 8$ ist „wahr“, somit **liegt** g **in** E!

Schneidend: Eine Ebene E und eine Gerade g schneiden sich **immer** in einem Schnittpunkt S, wenn sie **nicht parallel** sind. Nachdem festgestellt wurde, dass die Ebene und Gerade nicht parallel sind, kann man den gemeinsamen Schnittpunkt S berechnen, indem man die Gerade g in die Ebenengleichung einsetzt und diese nach dem Parameter der Geradengleichung auflöst. Setzt man den berechneten Parameterwert anschließend in die Geradengleichung ein, erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes S.



Beispiel. Wie ist die gegenseitige Lage der

Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$?

1. Untersuche das Skalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Richtungsvektor der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) = -15 - 1 - 8 = -24 \neq \mathbf{0}$$

⇒ Die Ebene E und die Gerade g sind somit **nicht parallel**.

2. Einsetzen der Geraden g in die Ebenengleichung von E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 8 & - & 3t \\ x_2 & = & -9 & + & t \\ x_3 & = & 0 & - & 4t \end{array}$$

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: 5(8-3t) - (-9+t) + 2(-4t) &= 1 \\ 40 - 15t + 9 - t - 8t &= 1 \\ 49 - 24t &= 1 \quad \mid -49 \\ -24t &= -48 \mid : (-24) \\ t &= 2 \end{aligned}$$

3. Einsetzen des Parameters $t = 2$ in die Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

⇒ Der gemeinsame Schnittpunkt der Ebene E und der Geraden g hat die Koordinaten $S(2|-7|-8)$.

2.8 Abstand

Um die Abstände zwischen verschiedenen geometrischen Objekten zu berechnen, sind im Folgenden einige Schemata aufgelistet. Bei Ebenen ist es wieder am einfachsten man bringt diese zunächst in **Koordinatenform**, sofern diese nicht bereits vorliegt.

2.8.1 Punkt Punkt

Das Schema zur Berechnung des Abstands zwischen zwei Punkten A und B ist folgendes:

1. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten A und B auf: $\overrightarrow{AB}$

2. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|$

3. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ist der Abstand zwischen den Punken A und B: $d = |\overrightarrow{AB}|$

Beispiel. Wie ist der Abstand zwischen den Punkten $A(1|-3|9)$ und $B(4|-2|5)$?

1. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten A und B auf:

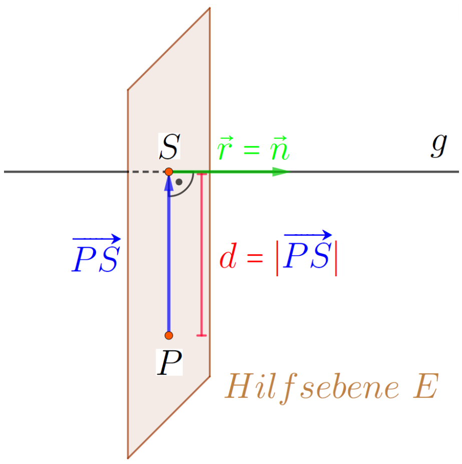
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-3) \\ 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und damit den Abstand d zwischen A und B:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26} \approx 5,099$$

2.8.2 Punkt Gerade

Der Abstand d zwischen einem Punkt P und einer Geraden g ist die Länge der **kürzesten Strecke** zwischen dem Punkt und der Geraden. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist folgendes:



1. Stelle eine Hilfsebene E in Koordinatenform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g als Normalenvektor $\vec{n}$ hat

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsebene E mit der Geraden g

3. Stelle den Vektor $\overrightarrow{PS}$ auf

4. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$: $|\overrightarrow{PS}|$

5. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$ ist der Abstand d zwischen dem Punkt P und der Geraden g: $d = |\overrightarrow{PS}|$

Beispiel. Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt $P(3|1|8)$ und der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

1. Stelle eine Hilfsebene E in Koordinatenform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor hat:

$E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = b \Rightarrow b = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = -9 + 4 + 8 = 3$
$\Rightarrow E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$ (Das b wird durch Einsetzen von P in E bestimmt)

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsebene E mit der Geraden g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -1 & - & 3t \\ x_2 & = & 5 & + & 4t \\ x_3 & = & 6 & + & t \end{array}$$

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: -3(-1-3t) + 4(5+4t) + (6+t) &= 3 \\ 3 + 9t + 20 + 16t + 6 + t &= 3 \\ 29 + 26t &= 3 \quad | -29 \\ 26t &= -26 \ | : 26 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$$t = -1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der gemeinsame Schnittpunkt der Hilfsebene E und der Geraden g hat die Koordinaten $S(2|1|5)$.

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten P und S auf:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-1 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

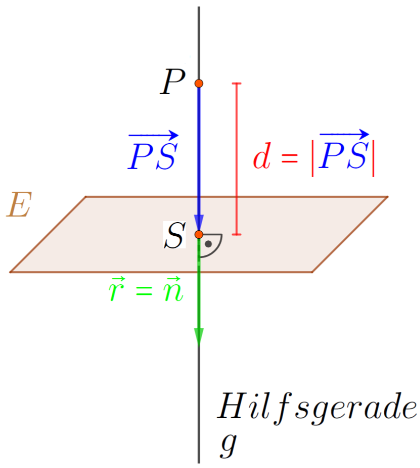
4. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$ und damit den Abstand d zwischen P und g:

$$d = |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

$\Rightarrow$ Der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g beträgt $\sqrt{10} \approx 3,1622$.

2.8.3 Punkt Ebene

Der Abstand d zwischen einem Punkt P und einer Ebene E ist die Länge der **kürzesten Strecke** zwischen dem Punkt und der Ebene. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist folgendes:



1. Stelle eine Hilfsgerade g in Parameterform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E als Richtungsvektor $\vec{r}$ hat

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden g mit der Ebene E

3. Stelle den Vektor $\overrightarrow{PS}$ auf

4. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$: $|\overrightarrow{PS}|$

5. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$ ist der Abstand d zwischen dem Punkt P und der Ebene E: $d = |\overrightarrow{PS}|$

Beispiel. Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt $P(5|1|-7)$ und der Ebene $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$?

1. Stelle eine Hilfsgerade g auf, die durch den Punkt P verläuft und den Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor hat:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (P \text{ wird als Stützvektor von } g \text{ eingesetzt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden E mit der Ebene E:

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: -7(5-7t) + 0(1+0t) + 2(-7+2t) &= 4 \\ -35 + 49t + 0 - 14 + 4t &= 4 \\ -49 + 53t &= 4 \quad \mid +49 \\ 53t &= 53 \mid :53 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der gemeinsame Schnittpunkt: $S(-2|1|-5)$.

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten P und S auf:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -2-5 \\ 1-1 \\ -5-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Bestimme die Länge des Vektors $\overrightarrow{PS}$ und damit den Abstand d zwischen P und E:

$d = |\overrightarrow{PS}| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 0 + 4} = \sqrt{53}$
$\Rightarrow$ Der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g beträgt $\sqrt{53} \approx 7,2801$.

2.8.4 Hessesche Normalenform (HNF)

Eine weitere Variante den Abstand d zwischen einem Punkt P und einer Ebene E zu berechnen, ist die sogenannte Hessesche Normalenform:

$$d(P, E) = \left| \frac{n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_2 \cdot p_2 - b}{\sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2}} \right|$$

Beispiel. Wie ist der Abstand zwischen dem Punkt $P(5|1|-7)$ und der Ebene $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$?

1. Wende die Hessesche Normalenform auf den Punkt P und die Ebene E an:

$$d(P, E) = \left| \frac{-7 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) - 4}{\sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{-35 - 14 - 4}{\sqrt{49 + 4}} \right| = \left| \frac{-53}{\sqrt{53}} \right| \approx |-7,2801| = 7,2801$$

2.8.5 Gerade Ebene

Ein Abstand zwischen einer Geraden g und einer Ebene E existiert nur, wenn diese parallel zueinander sind. Somit hat jeder Punkt auf der Geraden g denselben Abstand zur Ebene E. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist also folgendes:

1. Wähle den Stützvektor der Geraden g als Punkt P auf der Geraden g aus

2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E

2.8.6 Ebene Ebene

Ein Abstand zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 existiert nur, wenn diese parallel zueinander sind. Somit hat jeder Punkt auf der Ebene E_1 denselben Abstand zur Ebene E_2. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist also folgendes:

1. Wähle einen beliebigen Punkt P auf der Ebene E_1 aus

2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E_2

2.8.7 Gerade Gerade

Bei der Abstandsberechnung zwischen 2 Geraden g und h sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die beiden Geraden sind parallel zueinander. Das bedeutet, dass die beiden Geraden **überall (in jedem Punkt) denselben Abstand** zueinander haben. Das Schema zur Berechnung des Abstands ist somit folgendes:

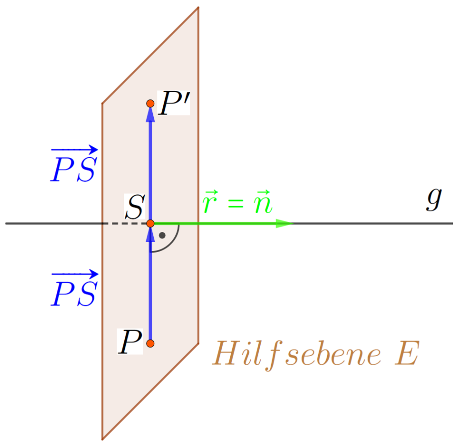
   1. Wähle den Stützvektor der Geraden h als Punkt P auf der Geraden h aus

   2. Berechne den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g

2. Die beiden Geraden sind **windschief** zueinander. Seid glücklich, das müsst ihr nicht im Abi können.

2.9 Spiegelungen

Punkt an Gerade: Sind ein Punkt P sowie eine Gerade g gegeben und gesucht ist der Spiegelpunkt P', der durch Spiegelung des Punktes P an der Geraden g entsteht, so lautet das Schema zur Berechnung des Spiegelpunktes P':



1. Stelle eine Hilfsebene E in Koordinatenform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g als Normalenvektor $\vec{n}$ hat

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsebene E mit der Geraden g

3. Stelle den Vektor $\overrightarrow{PS}$ auf

4. Addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ zu dem Punkt S und erhalte P': $S + \overrightarrow{PS} = P'$ oder addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ 2mal zu dem Punkt P und erhalte P':
$P + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PS} = P + 2\overrightarrow{PS} = P'$

Beispiel. Spiegele den Punkt $P(3|1|8)$ an der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt P'?

1. Stelle eine Hilfsebene E in Koordinatenform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Richtungsvektor der Geraden g als Normalenvektor hat:

$E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = b \Rightarrow b = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 = -9 + 4 + 8 = 3$
$\Rightarrow E: -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3$ (Das b wird durch Einsetzen von P in E bestimmt)

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsebene E mit der Geraden g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -1 & - & 3t \\ x_2 & = & 5 & + & 4t \\ x_3 & = & 6 & + & t \end{array}$$

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: -3(-1 - 3t) + 4(5 + 4t) + (6 + t) &= 3 \\ 3 + 9t + 20 + 16t + 6 + t &= 3 \\ 29 + 26t &= 3 \quad \mid -29 \\ 26t &= -26 \mid : 26 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

$$t = -1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der gemeinsame Schnittpunkt der Hilfsebene E und der Geraden g hat die Koordinaten $S(2|1|5)$.

3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten P und S auf:

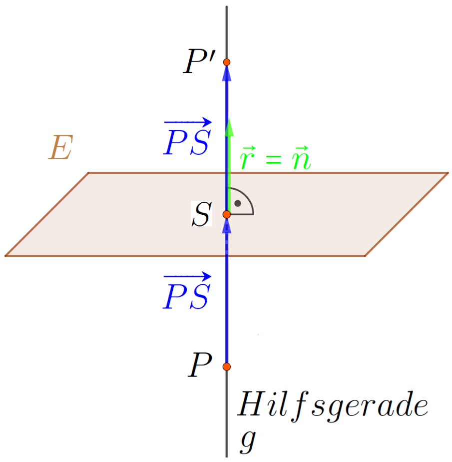
$$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 1 \\ 5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ zu dem Punkt S und erhalte P':

$$S + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Spiegelpunkt P' hat die Koordinaten $P'(1|1|2)$.

Punkt an Ebene: Sind ein Punkt P sowie eine Ebene E gegeben und gesucht ist der Spiegelpunkt P', der durch Spiegelung des Punktes P an der Ebene E entsteht, so lautet das Schema zur Berechnung des Spiegelpunktes P':



1. Stelle eine Hilfsgerade g in Parameterform auf, die durch den Punkt P verläuft und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E als Richtungsvektor $\vec{r}$ hat

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden g mit der Ebene E

3. Stelle den Vektor $\overrightarrow{PS}$ auf

4. Addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ zu dem Punkt S und erhalte P': $S + \overrightarrow{PS} = P'$ **oder** addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ 2mal zu dem Punkt P und erhalte P':

$P + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PS} = P + 2\overrightarrow{PS} = P'$

Beispiel. Spiegele den Punkt $P(5|1|-7)$ an der Ebene $E: -7x_1 + 2x_3 = 4$. Welche Koordinaten hat der Spiegelpunkt P'?

1. Stelle eine Hilfsgerade g auf, die durch den Punkt P verläuft und den Normalenvektor der Ebene E als Richtungsvektor hat:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (P \text{ wird als Stützvektor von } g \text{ eingesetzt})$$

2. Bestimme den Schnittpunkt S der Hilfsgeraden E mit der Ebene E:

$$\begin{aligned} g \text{ in } E: -7(5-7t) + 0(1+0t) + 2(-7+2t) &= 4 \\ -35 + 49t + 0 - 14 + 4t &= 4 \\ -49 + 53t &= 4 \quad | +49 \\ 53t &= 53 \quad | :53 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der gemeinsame Schnittpunkt: $S(-2|1|-5)$.

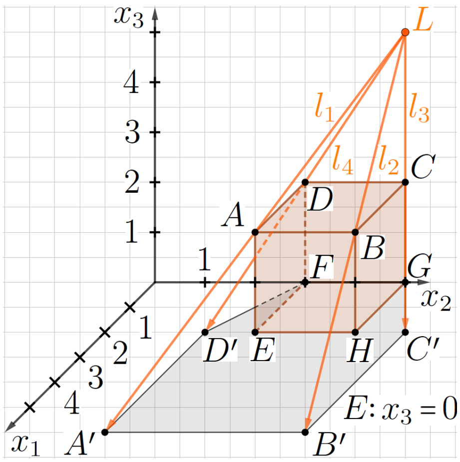
3. Stelle den Vektor zwischen den beiden Punkten P und S auf:
$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -2-5 \\ 1-1 \\ -5-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Addiere den Vektor $\overrightarrow{PS}$ zu dem Punkt S und erhalte P':
$S + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Der Spiegelpunkt P' hat die Koordinaten $P'(-9|1|-3)$.

2.10 Schatten durch punktförmige Lichtquelle oder Strahlen

Punktförmige Lichtquelle: Wird der Schatten eines Objektes durch eine punktförmige Lichtquelle L (z.B. eine Glühbirne im Raum) auf eine Ebene E erzeugt, so kann man die Schattenpunkte des Objektes mithilfe von Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... berechnen und anschließend den Schatten des Objektes zeichnen. Das Schema hierfür ist folgendes:



1. Stelle Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... in Parameterform auf, welche die punktförmige Lichtquelle L mit den Eckpunkten des Objektes, die Schatten werfen, verbinden

2. Schneide die Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... mit der Ebene E, auf die die Schatten fallen

3. Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte und (sofern auf der Ebene E vorhanden!) die „äußeren“ Punkte des Objektes miteinander

4. Die eingeschlossene Fläche ist der Schatten des Objektes auf der Ebene E

Beispiel. Zeichne den Quader mit den Eckpunkten $A(2|3|2)$, $B(2|5|2)$, $C(0|5|2)$, $D(0|3|2)$, $E(2|3|0)$, $F(0|3|0)$, $G(0|5|0)$ und $H(2|5|0)$ in ein Koordinatensystem ein. Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(-2|4|4)$. Zeichne den Schatten des Quaders in das Koordinatensystem ein, der durch die Lichtquelle L auf die x_1x_2-Ebene ($E: x_3 = 0$) geworfen wird.

1. Stelle Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, l_4 auf, welche die Lichtquelle L mit den Punkten A, B, C, D verbinden. (Das sind die einzigen Punkte, die Schatten auf die x_1x_2-Ebene werfen, da die anderen Eckpunkte E, F, G, H auf der x_1x_2-Ebene ($E: x_3 = 0$) liegen (Die x_3-Koordinate ist in diesen 4 Punkten gleich 0)) Wähle dafür als Stützvektor jeweils den Punkt L und als Richtungsvektor jeweils den Vektor zwischen L und den Eckpunkten A, B, C, D:

$$l_1: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + t \cdot \overrightarrow{LA} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 3-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + s \cdot \overrightarrow{LB} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 5-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_3: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r \cdot \overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 5-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_4: \vec{x} = \overrightarrow{OL} + u \cdot \overrightarrow{LD} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 3-4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schneide die Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, l_4 mit der Ebene E und erhalte die Schattenpunkte von A, B, C, D:

$$l_1 \text{ in } E: 0(-2+4t) + 0(4-t) + 1(4-2t) = 0$$

$$\begin{aligned} 4-2t &= 0 \quad | -4 \\ -2t &= -4 \ | : (-2) \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$$t = 2 \text{ in } l_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von A ist: $A'(6|2|0)$.

Berechnen der 3 weiteren Schnittpunkte von den Geraden l_2, l_3, l_4 mit der Ebene E nach demselben Schema ergibt:

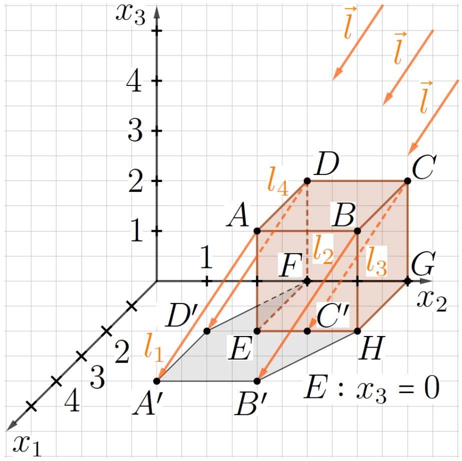
$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von B ist: $B'(6|6|0)$.

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von C ist: $C'(2|6|0)$.

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von D ist: $D'(2|2|0)$.

3. Verbinde die „äußeren“ Schattenpunkte (in dem Fall A', B', C', D') und (sofern auf der Ebene E vorhanden!) die „ äußeren“ Punkte des Objektes (in dem Fall F, G) miteinander. (Die Punkte E und H liegen „innerhalb“ der genannten „äußeren“ Punkte) Die eingeschlossene Fläche ist der gesuchte Schatten. (siehe oberes Schaubild).

Strahlen als Lichtquelle: Wird der Schatten eines Objektes durch eine weitentfernte Lichtquelle (z.B. Sonne) durch deren Strahlen $\vec{l}$ auf eine Ebene E erzeugt, so kann man die Schattenpunkte des Objektes mithilfe von Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... berechnen und anschließend den Schatten des Objektes zeichnen. Das Schema hierfür ist folgendes:



1. Stelle Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... in Parameterform auf, welche die Strahlen $\vec{l}$ als Richtungsvektor haben und durch die Eckpunkte des Objektes, die Schatten werfen, verlaufen

2. Schneide die Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, ... mit der Ebene E, auf die die Schatten fallen

3. Verbinde die „äußeren" Schattenpunkte und (sofern auf der Ebene E vorhanden!) die „äußeren" Punkte des Objektes miteinander

4. Die eingeschlossene Fläche ist der Schatten des Objektes auf der Ebene E

Beispiel. Zeichne den Quader mit den Eckpunkten $A(2|3|2)$, $B(2|5|2)$, $C(0|5|2)$, $D(0|3|2)$, $E(2|3|0)$, $F(0|3|0)$, $G(0|5|0)$ und $H(2|5|0)$ in ein Koordinatensystem ein. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben. Zeichne den Schatten des Quaders in das Koordinatensystem ein, der durch die Sonnenstrahlen $\vec{l}$ auf die x_1x_2-Ebene $(E : x_3 = 0)$ geworfen wird.

1. Stelle Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, l_4 auf, welche die Strahlen $\vec{l}$ als Richtungsvektor haben und durch die Punkte A, B, C, D verlaufen. (Das sind die einzigen Punkte, die Schatten auf die x_1x_2-Ebene werfen, da die anderen Eckpunkte E, F, G, H auf der x_1x_2-Ebene $(E : x_3 = 0)$ liegen (Die x_3-Koordinate ist in diesen 4 Punkten gleich 0)) Wähle dafür als Stützvektor den jeweiligen Eckpunkt A, B, C, D:

$$l_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2 : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_3: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 5-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$l_4: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + u \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schneide die Hilfsgeraden l_1, l_2, l_3, l_4 mit der Ebene E und erhalte die Schattenpunkte von A, B, C, D:

$$\begin{aligned} l_1 \text{ in } E: \quad 0(2+2t) + 0(3-t) + 1(2-2t) &= 0 \\ 2-2t &= 0 \quad | -2 \\ -2t &= -2 \ | : (-2) \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ in } l_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von A ist: $A'(4|2|0)$.

Berechnen der 3 weiteren Schnittpunkte von den Geraden l_2, l_3, l_4 mit der Ebene E nach demselben Schema ergibt:

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von B ist: $B'(4|4|0)$.

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von C ist: $C'(2|4|0)$.

$\Rightarrow$ Der Schattenpunkt von D ist: $D'(2|2|0)$.

3. Verbinde die „äußeren" Schattenpunkte (in dem Fall A', B', D') und (sofern auf der Ebene E vorhanden!) die „ äußeren" Punkte des Objektes (in dem Fall F, G, H) miteinander. (Die Punkte C' und E liegen „innerhalb" der genannten „äußeren" Punkte) Die eingeschlossene Fläche ist der gesuchte Schatten. (siehe oberes Schaubild).

2.11 Winkel

Schnittwinkel zwischen Gerade und Gerade: Der Schnittwinkel α zwischen 2 Geraden g und h berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ von g und h geteilt durch die Länge von $\vec{r}$ mal die Länge von $\vec{v}$. Die Gleichung lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{v}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|}$$

Beispiel. Wie ist der Winkel zwischen den Geraden

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 9 + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 9 + 9}} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{19}} \approx 0,2452\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,2452 \qquad | \cos^{-1} \\ \Rightarrow \qquad \alpha &= \cos^{-1}(0,2452) \\ \Rightarrow \qquad \alpha &\approx 75,8^\circ\end{aligned}$$

Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene: Der Schnittwinkel α zwischen einer Gerade g und einer Ebene E berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{r}$ von g und des Normalenvektors $\vec{n}$ von E geteilt durch die Länge von $\vec{r}$ mal die Länge von $\vec{n}$. Die Gleichung lautet:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

Beispiel. Wie ist der Winkel zwischen der Ebene $E : 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8$
und der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$?

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|12 + 4 - 10|}{\sqrt{16 + 1 + 25} \cdot \sqrt{9 + 16 + 4}} \\ &= \frac{|6|}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,1719\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \sin(\alpha) &= 0,1719 \qquad | \sin^{-1}\\
\Rightarrow \quad \alpha &= \sin^{-1}(0,1719)\\
\Rightarrow \quad \alpha &\approx 9,9^\circ
\end{aligned}
$$

Schnittwinkel zwischen Ebene und Ebene: Der Schnittwinkel α zwischen 2 Ebenen E_1 und E_2 berechnet sich mithilfe dem Skalarprodukt beider Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ von E_1 und E_2 geteilt durch die Länge von $\vec{n}_1$ mal die Länge von $\vec{n}_2$. Die Gleichung lautet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Beispiel. Wie ist der Winkel zwischen den Ebenen

$E_1 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$ und $E_2 : 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4$?

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{|6 - 4 - 15|}{\sqrt{4 + 1 + 9} \cdot \sqrt{9 + 16 + 25}}\\
&= \frac{|-13|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} \approx 0,4914
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,4914 \qquad | \cos^{-1}\\
\Rightarrow \quad \alpha &= \cos^{-1}(0,4914)\\
\Rightarrow \quad \alpha &\approx 60,57^\circ
\end{aligned}
$$

3 Stochastik

Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind anbei einführende Begriffe erläutert, die als Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen.

3.1 Zufallsexperiment, Ergebnisraum, Ereignis, Gegenereignis, Zufallsvariable und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsexperiment: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet ein Zufallsexperiment, ein Experiment (Versuch), das bei wiederholter Durchführung unter gleichen „Versuchsbedingungen“ unterschiedliche Ausgänge annehmen kann. Der Ausgang eines solchen Zufallsexperiments ist somit nicht voraussagbar, also zufällig.

Beispiel. Münzwurf, Würfeln, Roulette, Lotto, usw.

Ergebnisraum: Der Ergebnisraum E (oder auch als Ω bezeichnet) in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet alle möglichen Ausgänge (**Ergebnisse**) eines Zufallsexperiments.

Beispiel.
Ergebnismenge Münzwurf: $E = \{Kopf, Zahl\}$
Ergebnismenge Würfeln: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis: Als Ereignis wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraums E eines Zufallsexperiments bezeichnet. Ein Ereignis „tritt ein" nach der Durchführung eines Zufallsexperiments, wenn das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ein Element des Ereignisses ist. Als **Gegenereignis** wird die „andere" Teilmenge des Ergebnisraums E bezeichnet. Also alle Elemente, die nicht im Ereignis „enthalten" sind.

Beispiel. Würfeln: Ergebnismenge $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis A: „Würfeln einer 2, 3 oder 4"
⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn entweder eine 2, 3 oder 4 gewürfelt wird
⇒ Das Gegenereignis „Nicht-A" tritt ein, wenn entweder eine 1, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis B: „Würfeln einer 1"
⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn eine 1 gewürfelt wird
⇒ Das Gegenereignis „Nicht-B" tritt ein, wenn entweder eine 2, 3, 4, 5 oder 6 gewürfelt wird

Ereignis C: „Die Augenzahl ist mindestens eine 4"
⇒ Dieses Ereignis tritt ein, wenn die gewürfelte Augenzahl größer oder gleich 4 ist, somit 4, 5 oder 6
⇒ Das Gegenereignis „Nicht-C" tritt ein, wenn entweder eine 1, 2 oder 3 gewürfelt wird

Zufallsvariable: Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraums E) eine Zahl zu.

Beispiel. Aus einer Tüte mit 10 Schrauben Inhalt werden 6 Schrauben entnommen mit der Zufallsvariable „X = Anzahl der defekten Schrauben":

Ergebnis	0 defekt	1 defekt	2 defekt	3 defekt	4 defekt	5 defekt	6 defekt
X	0	1	2	3	4	5	6

Beispiel. In einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge: $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, verliert der Spieler seine 2 Euro Einsatz
WENN einmal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück
WENN zweimal Zahl erscheint, erhält der Spieler seinen Einsatz + 2 Euro

Die Zufallsvariable „X = Gewinn“ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu:

Ergebnis	(Kopf|Kopf)	(Kopf|Zahl)	(Zahl|Kopf)	(Zahl|Zahl)
X	-2	0	0	2

Wahrscheinlichkeitsverteilung: Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nutzen wir den Buchstaben P („englisch probability = Wahrscheinlichkeit“) als Schreibweise:

$P(\text{Ereignis } A)$ = Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt
$P(X = k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable $X = k$ ist
$P(X \geq k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X **mindestens** so groß ist wie k
$P(X \leq k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X **höchstens** so groß ist wie k

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraums E) eine Wahrscheinlichkeit zu, dass es eintritt.

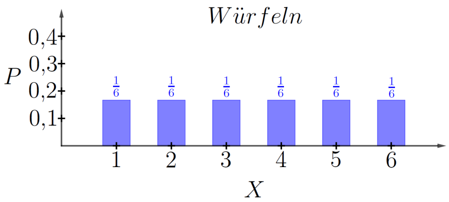
Beispiel. Würfeln:

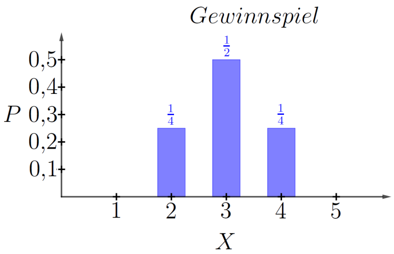
Ergebnismenge: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Die Zufallsvariable „X = Augenzahl“ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu.

X	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Das Experiment ist ein **Laplace-Experiment**, da alle Ergebnisse (Ausgänge) des Zufallsexperiments „Würfeln“ **dieselbe** Wahrscheinlichkeit haben.





Beispiel. In einem Gewinnspiel mit 0 Euro Einsatz wird eine Münze zweimal geworfen:

Ergebnismenge: $E = \{(Kopf|Kopf), (Kopf|Zahl), (Zahl|Kopf), (Zahl|Zahl)\}$

WENN keine Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 2 Euro
WENN einmal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 3 Euro
WENN zweimal Zahl erscheint, gewinnt der Spieler 4 Euro

Die Zufallsvariable „X = Gewinn“ ordnet jedem Ergebnis seinen Gewinn zu.

X	2	3	4
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

3.2 Baumdiagramm

Das Baumdiagramm ist ein anschauliches Hilfsmittel um die Ergebnisse eines Zufallsexperiments aufzuschreiben, insbesondere die Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsexperiments (z. B. Mehrmaliger Münzwurf, Mehrmaliges Würfeln, Mehrmaliges Drehen eines Glücksrads). Bei solch einem mehrstufigen Zufallsexperiments lassen sich sehr gut die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Einzelexperimente sowie die Wahrscheinlichkeiten möglicher Ereignisse rechnerisch ermitteln.

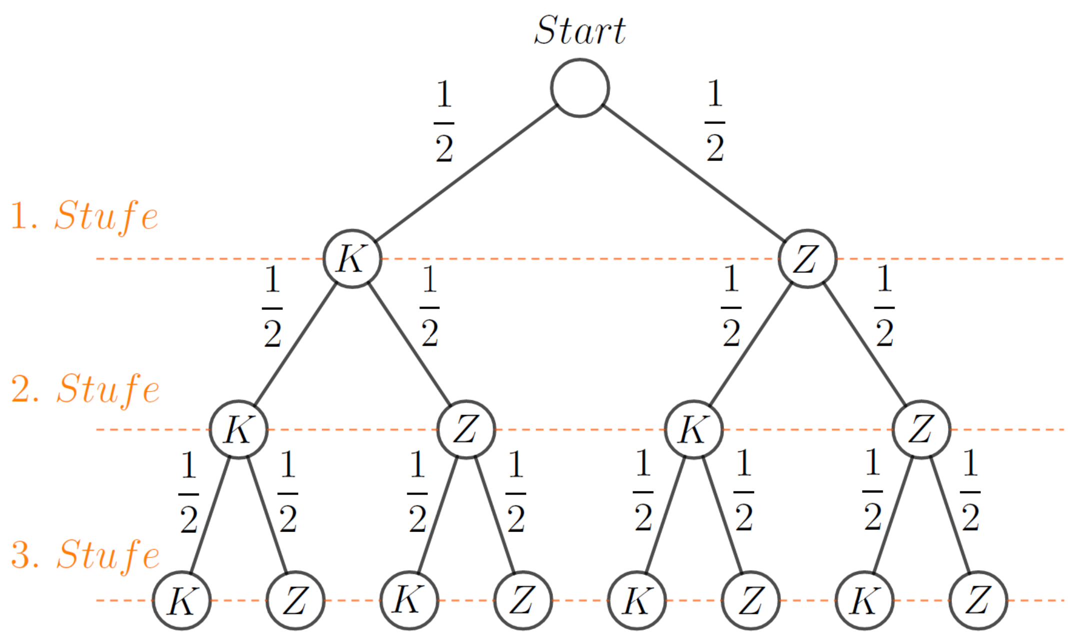
Um bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment ein Baumdiagramm zu zeichnen gilt es zunächst die Stufen herauszufinden und die jeweiligen möglichen „Ergebnisketten". Diese Ergebnisketten werden miteinander verbunden. Auf die Verbindungsstrecken schreibt man die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweils nachfolgenden Ergebnisses.

Beispiel. Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen:

Ergebnismenge pro Münzwurf: $E = \{Kopf, Zahl\}$

Ereignis	$Kopf\ (K)$	$Zahl\ (Z)$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Es gibt 3 Stufen im Baumdiagramm, da die Münze dreimal geworfen wird.



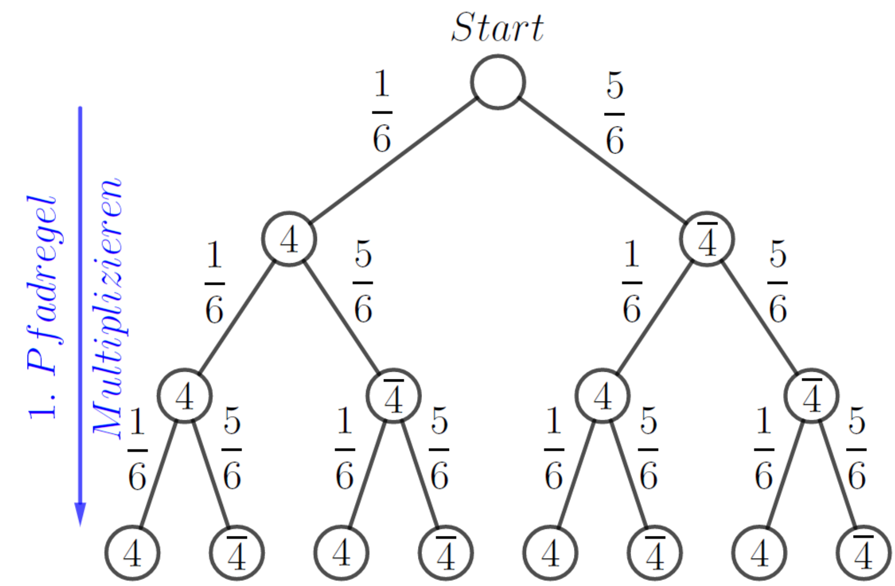
Pfad: Der Pfad in einem Baumdiagramm entspricht einem Weg durch den Baum, also einer „Ergebniskette“. Ein Pfad startet immer im Startpunkt und endet in der letzten Stufe. Wirft man beispielsweise eine Münze dreimal hintereinander, dann entspricht jede mögliche Ergebniskette (Versuchsausgang) $(K|K|K)$, $(K|K|Z)$, $(K|Z|K)$, $(K|K|Z)$, $(Z|K|K)$, $(Z|K|Z)$,$(Z|Z|K)$, $(K|Z|Z)$ einem Pfad.

1. Pfadregel: Um die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Versuchsausgang (einen Pfad) zu bestimmen, multipliziert man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades miteinander.

Beispiel. Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dreimal hintereinander **keine** 4 gewürfelt?
Die Schreibweise für **Nicht-4** ist $\overline{4}$. Sie beinhaltet die Augenzahlen $\overline{4} = \{1,2,3,5,6\}$. Wir können die Ergebnismenge für jeden einzelnen Würfelwurf so schreiben: $E = \{4, \overline{4}\}$

Ereignis	4	$\overline{4}$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Es gibt 3 Stufen im Baumdiagramm, da der Würfel dreimal geworfen wird.



E	$(4\|4\|4)$	$(4\|4\|\overline{4})$	$(4\|\overline{4}\|4)$	$(4\|\overline{4}\|\overline{4})$	$(\overline{4}\|4\|4)$	$(\overline{4}\|4\|\overline{4})$	$(\overline{4}\|\overline{4}\|4)$	$(\overline{4}\|\overline{4}\|\overline{4})$
P	$\frac{1}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

2. Pfadregel

Addieren

Wir nutzen die 1. Pfadregel um die Wahrscheinlichkeit für „dreimal hintereinander keine 4“ (Ergebniskette/Pfad: $(\overline{4}|\overline{4}|\overline{4})$) zu bestimmen:

$$P((\overline{4}|\overline{4}|\overline{4})) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0,5787$$

2. Pfadregel: Umfasst ein Ereignis mehrere Versuchsausgänge (Pfade), so berechnet man die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis, indem man die Wahrscheinlichkeiten der betreffenden Pfade (Versuchsausgänge) miteinander addiert.

Z.B. könnte eine Fragestellung in obigem Beispiel sein: Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim dreimaligem Würfelwurf genau 2 Vieren gewürfelt?

Das Ereignis „Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“ umfasst die Pfade $(4|4|\overline{4})$, $(4|\overline{4}|4)$ und $(\overline{4}|4|4)$. Wir nutzen die 2. Pfadregel um die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis zu bestimmen:

$$P(\text{„Genau 2 Vieren bei dreimaligem Würfeln“}) = \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} \approx 0,0694$$

3.3 Gegenwahrscheinlichkeit

Oftmals ist es einfacher die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (der „Gegenwahrscheinlichkeit“) zu bestimmen. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{Ereignis}) = 1 - P(\text{Gegenereignis})$$

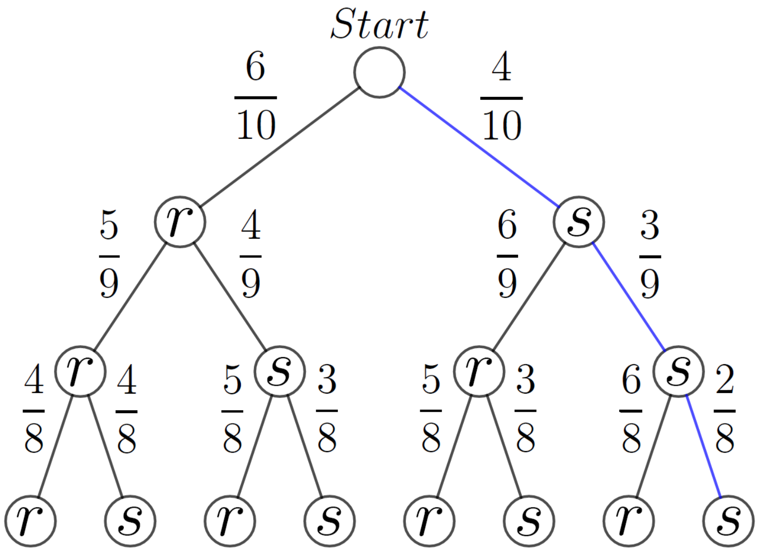
Wenn die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses (P(Gegenereignis)) also deutlich „einfacher“ und somit schneller zu berechnen ist (z.B. da im Baumdiagramm das Gegenereignis deutlich weniger Pfade beinhaltet, die es nach der 2. Pfadregel aufzuaddieren gilt), ist der Weg die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses über die Gegenwahrscheinlichkeit zu berechnen effizienter.

Beispiel. Aus einer Urne mit 6 roten und 4 schwarzen Kugeln werden drei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine der gezogenen Kugeln rot?

1. Überlegen, ob die Berechnung der Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ einfacher ist:

Das Gegenereignis ist: „Keine der gezogenen Kugeln ist rot“ = „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“
$\Rightarrow$ Im Baumdiagramm beinhaltet dieses Gegenereignis bloß einen Pfad, weshalb die Wahrscheinlichkeit für dieses Gegenereignis deutlich einfacher zu bestimmen ist!

Achtung: Die Kugeln werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die gezogenen Kugeln kommen nicht wieder zurück in die Urne, d.h. nach der ersten Ziehung sind **nur noch 9 Kugeln** in der Urne und nach der zweiten Ziehung **nur noch 8 Kugeln**!



Somit ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot“ über die Gegenwahrscheinlichkeit einfacher:

$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - P(\text{„Alle gezogenen Kugeln sind schwarz“})$

$P(\text{„Mindestens eine rote Kugel“}) = 1 - (\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30} \approx 0,9667$

3.4 Erwartungswert

Bei einem Zufallsexperiment gibt der Erwartungswert den Wert an, den man durchschnittlich erzielt. Sei X eine Zufallsvariable, die jedem Ergebnis des Zufallsexperiments (also jedem Element des Ergebnisraumes E) eine Zahl zuordnet. Um den Erwartungswert $E(X)$ des Zufallsexperiments zu bestimmen, multipliziert man den X-Wert von jedem Ergebnis mit seiner jeweiligen Wahrscheinlichkeit $P(X)$ und addiert diese Produkte aufeinander.

Hinweis: Zur Übersicht ist es hilfreich sich zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments in Tabellenform aufzuschreiben und anschließend den Erwartungswert zu berechnen.

Beispiel. Ein Würfel wird einmal geworfen. Die Zufallsvariable „X = Augenzahl“ ordnet jedem Ergebnis seine Augenzahl zu. Wie ist der Erwartungswert?

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments „Einmal würfeln“:

X	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Erwartungswert $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$

$\Rightarrow$ Durchschnittlich erzielt man somit bei einem Würfelwurf eine $3,5$.

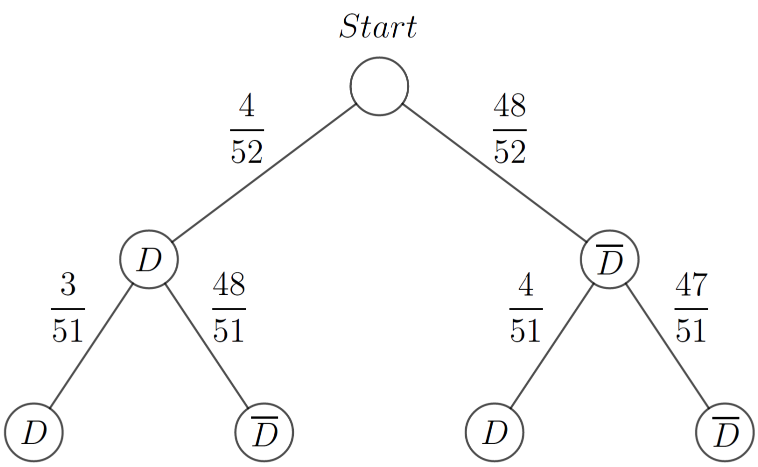
Beispiel. Bei einem Gewinnspiel mit 2 Euro Einsatz werden aus einem Blackjack-Kartendeck mit 52 Karten zwei Karten **ohne** Zurücklegen hintereinander gezogen:

WENN der Spieler keine Dame aufdeckt, erhält der Spieler keinen Gewinn
WENN der Spieler unter den 2 Karten eine Dame aufdeckt, gewinnt er 10 Euro
WENN der Spieler zwei Damen aufdeckt, gewinnt er 50 Euro

Ist dieses Gewinnspiel fair?

Bei dieser Fragestellung gilt es nun herauszufinden, was der erwartete Gewinn dieses Gewinnspiels ist. Entspricht der erwartete Gewinn den Einsatzkosten von 2 Euro, so ist dieses Spiel fair.
1. Bestimmen der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels mithilfe eines Baumdiagramms:

Der Buchstabe D steht für das Ergebnis eine Dame aufzudecken, während $\overline{D}$ für das Ergebnis steht, keine Dame aufzudecken. **Achtung:** Die Karten werden ohne Zurücklegen hintereinander gezogen, d.h. die erste gezogene Karte bleibt aufgedeckt liegen und beim Ziehen der 2. Karte sind **nur noch 51 Karten** im Deck!



Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnspiels „2 Karten ziehen“:

Ergebnis	$(D\|D)$	$(D\|\overline{D})$	$(\overline{D}\|D)$	$(\overline{D}\|\overline{D})$
Wahrscheinlichkeit $P(X)$	$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}=\frac{1}{221}$	$\frac{4}{52}\cdot\frac{48}{51}=\frac{16}{221}$	$\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}=\frac{16}{221}$	$\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}=\frac{188}{221}$

2. Bestimmen des Erwartungswerts des Glückspiels:

$$E(Gewinnspiel) = 50\cdot\frac{1}{221}+10\cdot\frac{16}{221}+10\cdot\frac{16}{221}+0\cdot\frac{188}{221}=\frac{370}{221}\approx 1,6742$$

$\Rightarrow$ Der erwartete Gewinn beträgt $1,67$ Euro. Damit ist dieses Gewinnspiel mit einem Einsatz von 2 Euro nicht fair!

3.5 Fakultät $n!$

Die Fakultät einer natürlichen Zahl $n!$ berechnet beispielsweise die Lösungen für folgende Fragen:

Beispiel.
1. Angenommen alle Becher unterscheiden sich farblich voneinander. Wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) gibt es beim Beerpong die 10 Becher auf einer Seite aufzustellen?
2. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 5 Bücher auf einen Schrank zu stellen?

1. $10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 3628800$ (verschiedene Möglichkeiten)
2. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ (verschiedene Möglichkeiten)

Hinweis: $0! = 1$ Ansonsten werden alle Fakultäten wie oben berechnet: Die Zahl wird jeweils multipliziert mit den Zahlen immer um eins absteigend bis zur 1.

3.6 Binomialverteilung, Bernoulli-Experiment, Binomialkoeffizient

Bernoulli-Experiment: Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit **immer genau 2 möglichen Versuchsausgängen (Ergebnissen)**:
z.B. **(„Treffer“|„Nicht-Treffer“)** = („Die 6 wird gewürfelt“|„Die 6 wird nicht gewürfelt“), („Schraube ist defekt“|„Schraube ist nicht defekt“), („Patient ist infiziert“|„Patient ist nicht infiziert“), („Gewinn“|„Niete“), („Erfolg“|„Misserfolg“), („Kopf“|„Zahl“), usw. (d.h. der Ergebnisraum E besteht immer aus genau 2 Elementen).

Binomialkoeffizient: Führt man ein Bernoulli-Experiment n-mal durch, d.h. man wiederholt das Experiment n-mal (mehrstufiges Bernoulli-Experiment), so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n. Sei k die Anzahl an „Treffern" in der Bernoulli-Kette und dementsprechend $n-k$ die Anzahl an „Nicht-Treffern". Da das Bernoulli-Experiment nur n-mal durchgeführt wird kann k (die Anzahl der „Treffer") maximal so groß sein wie n ($k \leq n$). Der Binomialkoeffizient berechnet bei k Treffern in einer Bernoulli-Kette der Länge n, wie viele verschiedene Möglichkeiten (Kombinationen) es für die Reihenfolge der „Treffer" und „Nicht-Treffer" gibt. Die Schreibweise für den Binomialkoeffizienten ist:

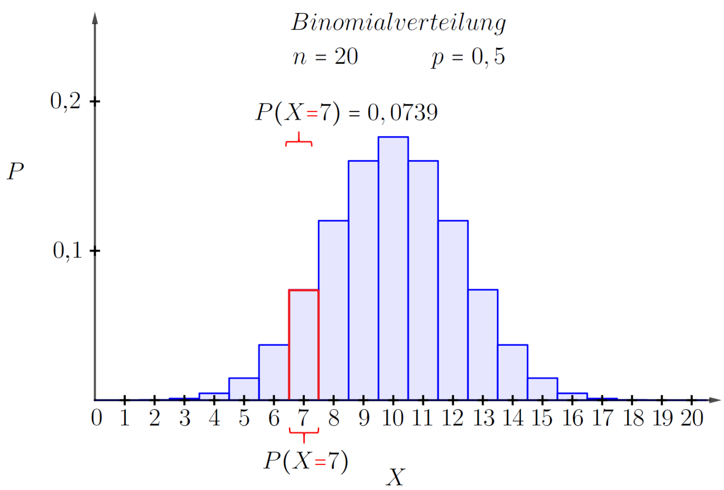
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel. $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{1} = 56$

Binomialverteilung: Die Binomialverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeiten P von Bernoulli-Ketten. Ist die Erfolgswahrscheinlichkeit, in einem Bernoulli-Experiment einen „Treffer" zu landen, gleich p, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Bernoulli-Kette der Länge n, genau k Treffer auftreten folgendermaßen. Man kann entweder $B(n, p, k)$ oder $P(X = k)$ schreiben:

$$P(X{=}k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Beispiel. Eine Münze wird 20-mal hintereinander geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau 7-mal Kopf zu werfen?
Die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer", also Kopf zu werfen, ist $p = 0,5$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus $n = 20$ Würfen genau $k = 7$ mal Kopf (Treffer) zu werfen:
$P(X{=}7) = \binom{20}{7} \cdot 0,5^7 \cdot (1-0,5)^{20-7} = \frac{20!}{7! \cdot (20-7)!} \cdot 0,5^7 \cdot (0,5)^{13} \approx 0,0739$



Taschenrechner: Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit $P(X{=}k)$ (also „genau k Treffer") mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „binompdf" oder auch „Binomial PD". Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander n, p und k ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

3.6.1 Erwartungswert

Für die Berechnung des Erwartungswerts μ (auch $E(X)$) bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von p gilt:

$$\mu = n \cdot p$$

Beispiel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% sind untersuchte Patienten mit einem Grippevirus infiziert. Was ist der Erwartungswert, der mit einem Grippevirus infizierten Patienten, bei einer Untersuchung von 200 Patienten?

Der Erwartungswert für eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0,05$, dass ein Patient am Grippevirus infiziert ist, bei einer Untersuchung von $n = 200$ Patienten ist:

$\mu = 200 \cdot 0,05 = 10$

3.6.2 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

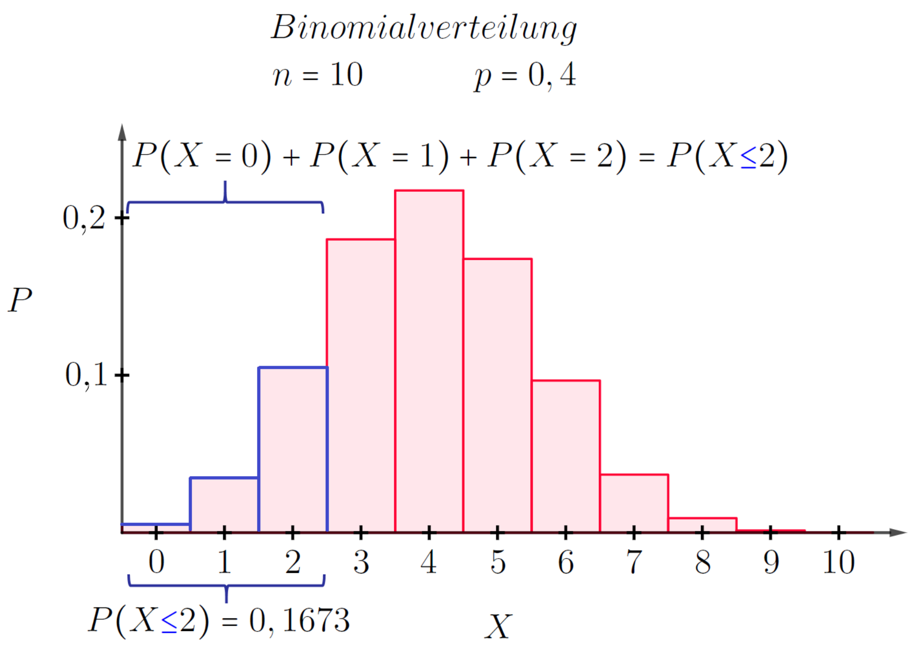
Kommt in einer Aufgabenstellung zu einer binomialverteilten Zufallsvariable X, die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für „höchstens k Treffer" oder „mindestens k Treffer", so handelt es sich um eine kumulierte Wahrscheinlichkeit. Es ist nicht die Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses: $P(X = k)$, sondern nach mehreren einzelnen Ereigniswahrscheinlichkeiten vereint/kumuliert:

$$\begin{aligned} P(X{\leq}k) \quad &\Rightarrow (\text{„höchstens k Treffer"}) \\ P(X{\geq}k) \quad &\Rightarrow (\text{„mindestens k Treffer"}) \end{aligned}$$

Beispiel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 2 Schrauben defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt $p = 0,4$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit $n = 10$ Schrauben höchstens $k \leq 2$ Schrauben zu erhalten:

$$\begin{aligned} P(X{\leq}2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot (0,6)^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot (0,6)^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot (0,6)^8 \\ &\approx 0,1673 \end{aligned}$$

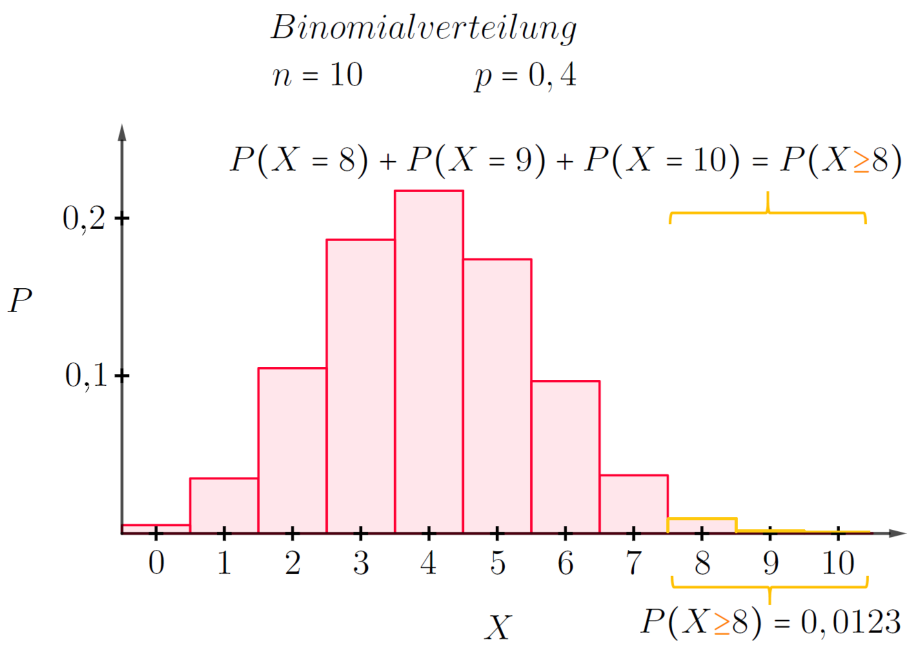


Taschenrechner: Die Berechnung für die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ (also „höchstens k Treffer“) mit dem Taschenrechner erfolgt über die Funktion „binomcdf“ oder auch „Binomial CD“. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr nacheinander n, p und k ein. Anschließend liefert der Taschenrechner die Lösung.

Beispiel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 8 Schrauben defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt $p = 0,4$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit $n = 10$ Schrauben mindestens $k \geq 8$ Schrauben zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\
&= \binom{10}{8} \cdot 0,4^8 \cdot (0,6)^2 + \binom{10}{9} \cdot 0,4^9 \cdot (0,6)^1 + \binom{10}{10} \cdot 0,4^{10} \cdot (0,6)^0 \\
&\approx 0,0123
\end{aligned}
$$



Taschenrechner: Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$ (also „mindestens k Treffer") gibt es keine Funktion im Taschenrechner. Man muss zunächst die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$ mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit bestimmen:

$$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \leq \boldsymbol{k-1})$$

Nun kann man im Taschenrechner wieder über die Funktion „binomcdf" oder auch „Binomial CD" die Wahrscheinlichkeit für $P(X \leq \boldsymbol{k-1})$ (also „höchstens $\boldsymbol{k-1}$ Treffer") ausrechnen. 1 Minus das Ergebnis liefert dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$.

Beispiel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% sind die produzierten Schrauben defekt. Als Stichprobe werden 10 Schrauben aus der Produktion entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 8 Schrauben defekt?

Die Trefferwahrscheinlichkeit, dass eine Schraube defekt ist beträgt $p = 0,4$. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit aus einer Stichprobe mit $n = 10$ Schrauben mindestens $k \geq 8$ Schrauben zu erhalten:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq \boldsymbol{8-1}) = 1 - P(X \leq \boldsymbol{7}) \approx 1 - 0,9877 = 0,0123$$

3.7 Einseitiger Hypothesentest

Bei einem Hypothesentest wird eine Hypothese, also eine noch nicht überprüfte Behauptung/Annahme/Aussage über einen bestimmten Sachverhalt, anhand einer Stichprobe auf ihre Gültigkeit geprüft.

Eine Hypothese könnte beispielsweise sein: „Auf dem Oktoberfest trinken mindestens 20% der Festzeltbesucher kein Bier“. Mit einem Hypothesentest könnte man diese Aussage (Hypothese) anhand einer Stichprobe überprüfen, für die man z.B. in einem Festzelt 100 Festzeltbesucher nach ihrem Bierkonsum befragt (also Stichprobenumfang $n = 100$) und nach der Befragung schaut/auswertet, bei wievielen Befragten die Aussage (Hypothese) zugetroffen hat.
Haben bei der Auswertung **höchstens 19** Festzeltbesucher (also zwischen 0−19) angegeben, dass sie kein Bier trinken und somit mindestens 81 Festzeltbesucher (also zwischen 81 − 100) angegeben, dass sie Bier trinken, so ist die **Hypothese falsch und wird verworfen**, da in der Stichprobe $n = 100$ NICHT mindestens 20% der Befragten angegeben haben, kein Bier zu trinken.
Haben andererseits bei der Auswertung **mindestens 20** Festzeltbesucher (also zwischen 20 − 100) angegeben, dass sie kein Bier trinken und somit höchstens 80 Festzeltbesucher (also 0 − 80) angegeben, dass sie Bier trinken, so ist die **Hypothese wahr und wird angenommen**, da in der Stichprobe $n = 100$ auf jeden Fall mindestens 20% (oder mehr) der Befragten angegeben haben, kein Bier zu trinken.

Beim einseitigen Hypothesentest wird anhand einer Stichprobe mit dem Umfang n getestet, ob die in der Aufgabenstellung getroffene Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ p_0, in einem **Bernoulli-Experiment** einen „Treffer“ zu landen, in der Stichprobe größer ($p > p_0$: rechtsseitiger Test) oder kleiner ($p < p_0$: linksseitiger Test) ist, als angenommen.

Nullhypothese H_0: Die Nullhypothese beinhaltet die Aussage über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ p_0, die in der Aufgabenstellung getroffen wurde. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Rechtsseitiger Test: $\boldsymbol{H_0 :\ p \leq p_0}$
   ⇒ Keywords: „höchstens/maximal/nicht mehr als 20% sind defekt“

2. Linksseitiger Test: $\boldsymbol{H_0 :\ p \geq p_0}$
   ⇒ Keywords: „mindestens/zumindest/nicht weniger als 20% sind defekt“

Gegenhypothese H_1: Die Gegen-/Alternativhypothese stellt die Verneinung der Nullhypothese dar. Sie ist somit die gegenteilige Aussage zu der Behauptung über die „Erfolgswahrscheinlichkeit“ p_0, die in der Aufgabenstellung getroffen wurde. Entsprechend den beiden Möglichkeiten der Nullhypothese H_0 stehen zwei Möglichkeiten für die Gegenhypothese dem gegenüber:

1. Rechtsseitiger Test: $\boldsymbol{H_1 :\ p > p_0}$
   ⇒ Keywords: „größer/mehr als 20% sind defekt“

2. Linksseitiger Test: $\boldsymbol{H_1 :\ p < p_0}$
   ⇒ Keywords: „weniger/weniger als 20% sind defekt“

Entscheidungsregel (Annahme- und Ablehnungsbereich): Beim einseitigen Hypothesentest betrachtet man immer eine sogenannte Testgröße X, welche die Anzahl der „Treffer“ in der Stichprobe der Länge n, angibt. Je nachdem welchen Wert diese Testgröße in der Stichprobe annimmt, wird die Nullhypothese H_0 als wahr angenommen und die Gegenhypothese H_1 verworfen/abgelehnt oder andersherum wird die Nullhypothese H_0 verworfen/abgelehnt und die Gegenhypothese H_1 als wahr angenommen.

Beispiel. Die Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Jahr einen Ausschuss von 4% ausgewiesen. In diesem Jahr soll monatlich geprüft werden, ob monatlich prozentual nicht mehr Ausschuss als im vergangenen Jahr vorliegt. Dafür werden monatlich 200 Bälle der Produktion entnommen.

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 und ihrer Gegenhypothese H_1:

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit $p_0 = 0,04$ einen defekten Ball zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **rechtsseitigen Test** (Keyword: „nicht mehr als“) mit den beiden Hypothesen auf:

$H_0 : p \leq 0,04$
$H_1 : p > 0,04$

2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von $n = 200$ Bällen. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 200 defekte Bälle (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich A der Nullhypothese umfasst alle Ergebnisse, in denen maximal 4% der 200 Bälle defekt sind. Somit umfasst der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ alle Ergebnisse, in denen mehr als 4% der 200 Bälle defekt sind. 4% von 200 sind $0,04 \cdot 200 = 8$. Dementsprechend ist:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und
$\overline{A} = \{9, 10, ..., 199, 200\}$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße X (Anzahl der defekten Bälle in der Stichprobe mit $n = 200$ Bällen) annimmt, wird H_0 angenommen und H_1 verworfen oder umgekehrt.

Beispiel. Die Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Jahr einen Ausschuss von 15% ausgewiesen. Das Produktionsverfahren wurde daraufhin über den Jahreswechsel optimiert und es soll fortan monatlich überprüft werden, ob der Ausschuss prozentual weniger als im vergangenen Jahr geworden ist. Für die Überprüfung werden monatlich 200 Bälle der Produktion entnommen.

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 und ihrer Gegenhypothese H_1:

Der Aufgabenstellung entnimmt man die Erfolgswahrscheinlichkeit $p_0 = 0,15$ einen defekten Ball zu erwischen und stellt nach der Aufgabenstellung den **linksseitigen Test** (Keyword: „weniger als“) mit den beiden Hypothesen auf:

$H_0 : p \geq 0,15$
$H_1 : p < 0,15$

2. Aufstellen der Entscheidungsregel mit Annahme- und Ablehnungsbereich:

Der Aufgabenstellung entnimmt man einen Stichprobenumfang von $n = 200$ Bällen. Die Stichprobe kann dementsprechend maximal 200 defekte Bälle (Treffer) aufweisen. Der Annahmebereich A der Nullhypothese umfasst alle Ergebnisse, in denen mindestens 15% der 200 Bälle defekt sind. Somit umfasst der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ alle Ergebnisse, in denen weniger als 15% der 200 Bälle defekt sind. 15% von 200 sind $0,15 \cdot 200 = 30$. Dementsprechend ist:

$A = \{30, 31, ..., 199, 200\}$ und
$\overline{A} = \{0, 1, ..., 28, 29\}$

Je nachdem welchen Wert also die Testgröße X (Anzahl der defekten Bälle in der Stichprobe mit $n = 200$ Bällen) annimmt, wird H_0 angenommen und H_1 verworfen oder umgekehrt.

3.7.1 Fehler 1. Art

Da man bei Hypothesentests „nur“ eine Stichprobe berücksichtigt, kann der Fall eintreten, dass die Auswertung der Stichprobe zu einer Ablehnung der Nullhypothese H_0 führt, obwohl jedoch „in Wahrheit“ (auf die Grundgesamtheit bezogen) die Nullhypothese H_0 eigentlich wahr ist (Wenn man nicht nur die Stichprobe, sondern ALLE, berücksichtigt). In diesem Fall, wenn also die Nullhypothese **H_0 zu Unrecht/irrtümlich** bei einem Hypothesentest **verworfen/abgelehnt** wird, liegt ein sogenannter **Fehler 1. Art** vor (auch α-Fehler genannt).

Beispiel. In den Festzelten des Oktoberfests herrscht Jahr für Jahr reges Treiben. Täglich strömen etwa 150.000 Besucher in die Festzelte um sich mit Speis und Trank zu verköstigen. In einem Interview behauptet der Oktoberfest-Veranstalter, „dass auf dem Oktoberfest mindestens 20% der Festzeltbesucher kein Bier trinken“. Diese Hypothese möchte ein eifriger Student in seiner Abschlussarbeit durch einen Hypothesentest überprüfen. Dafür befragt er an einem Samstag 100 Festzeltbesucher nach ihrem Bierkonsum.

Linksseitiger Hypothesentest (Keyword: „mindestens“) mit der „Treffer-/ Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p_0 = 0,2$ und einem Stichprobenumfang $n = 100$:

$H_0: p \geq 0,2$
$H_1: p < 0,2$
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0:
$A = \{20, 21, ..., 99, 100\}$ und
$\overline{A} = \{0, 1, ..., 18, 19\}$

Beispiel für einen **Fehler 1. Art** bei diesem Hypothesentest:
In der Stichprobe von den 100 Befragten geben nur 17 Personen (also $17\% < 20\%$) an, dass sie kein Bier trinken. Somit wird die Nullhypothese H_0 verworfen/abgelehnt. Hätte der Student jedoch sich die Mühe gemacht und ALLE 150.000 anwesenden Festzeltbesucher an diesem Tag nach ihrem Bierkonsum befragt, so wäre herausgekommen, dass 45.000 Personen (also $\frac{45.000}{150.000} \cdot 100 = 30\% \geq 20\%$) angegeben hätten, dass sie kein Bier trinken. Auf die Grundgesamtheit (ALLE 150.000 Festzeltbesucher) bezogen wurde somit die Nullhypothese H_0 bei diesem Hypothesentest zu Unrecht/irrtümlich verworfen.

Ein **Fehler 1. Art** wäre natürlich gerade für unseren eifrigen Studenten sehr ärgerlich, gerade weil die Durchführung und Auswertung eines Hypothesentest mit viel Aufwand verbunden ist. Unser Student ist somit sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher **Fehler 1. Art** auftritt, möglichst klein zu halten. Jedoch soll dabei die Aussagekraft/Signifikanz des Hypothesentests in Bezug auf die Grundgesamtheit so hoch wie möglich bleiben, schließlich wird die Studie in einem renommierten, wissenschaftlichen Paper der Universität veröffentlicht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Fehler 1. Art bei einem Hypothesentest auftritt (man spricht auch von der Irrtumswahrscheinlichkeit), hängt von der Wahl des kritischen Werts k ab, ab dem die Nullhypothese H_0 angenommen wird. Der kritische Wert k ist somit der Wert im Ablehnungsbereich $\overline{A}$, der den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ vom Annahmebereich A „trennt". Beim rechtsseitigen Test ist also k der kleinste Wert des Ablehnungsbereich $\overline{A}$ und andersherum ist beim linksseitigen Test k der größte Wert des Ablehnungsbereich $\overline{A}$.

Bei einem Hypothesentest mit der binomialverteilten Testgröße X, mit der „Erfolgswahrscheinlichkeit" p_0, mit der Stichprobenlänge n und mit dem kritischen Wert k berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit gemäß der Binomialverteilung:

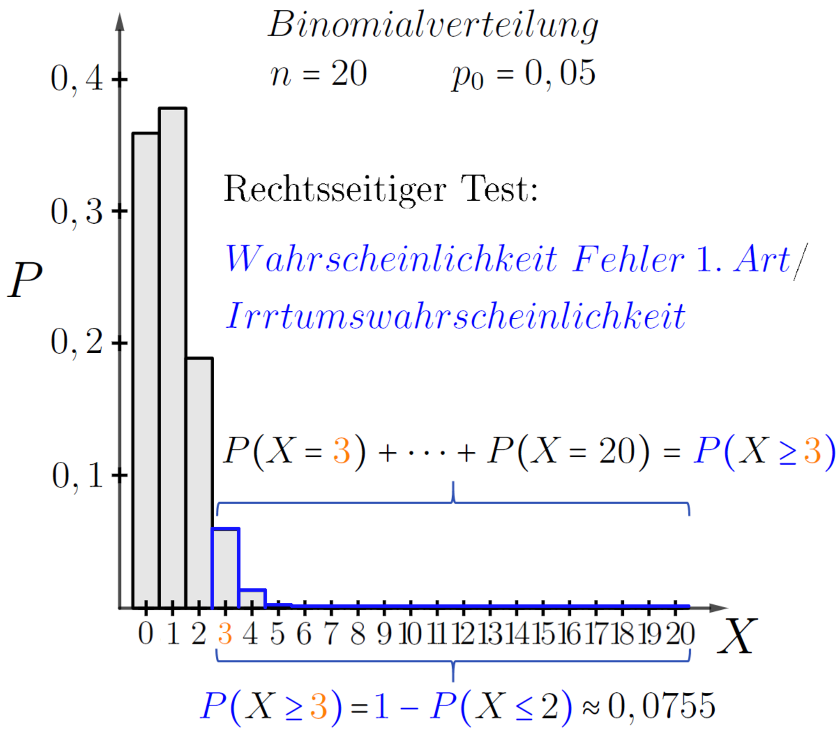
$$\text{Rechtsseitiger Test: } P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$$
$$\text{Linksseitiger Test: } P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k)$$

Beispiel. Die Aussage „Die Produktionsmaschine der Beerpong AG hat in ihrer Bälleproduktion im vergangenen Geschäftsjahr einen Ausschuss von höchstens 5% gehabt" stand im letzten Geschäftsbericht der Beerpong AG. Ein Mitarbeiter befürchtet, bedingt durch Verschleiß, dass die Maschine nun im neuen Geschäftsjahr einen höheren prozentualen Ausschuss generiert. Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn mehr als 2 Bälle defekt sind, so muss die Aussage des letzten Geschäftsjahres verworfen und angepasst werden. Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „höchstens“) mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit“ $p_0 = 0,05$ und einem Stichprobenumfang $n = 20$ dar:
$H_0 : p \leq 0,05$
$H_1 : p > 0,05$
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0:
$A = \{0, 1, 2\}$ und
$\overline{A} = \{3, 4, ..., 19, 20\}$

Für den kritischen Wert $k = 3$ ist die Irrtumswahrscheinlichkeit/Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3 - 1) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,9245 = 0,0755$

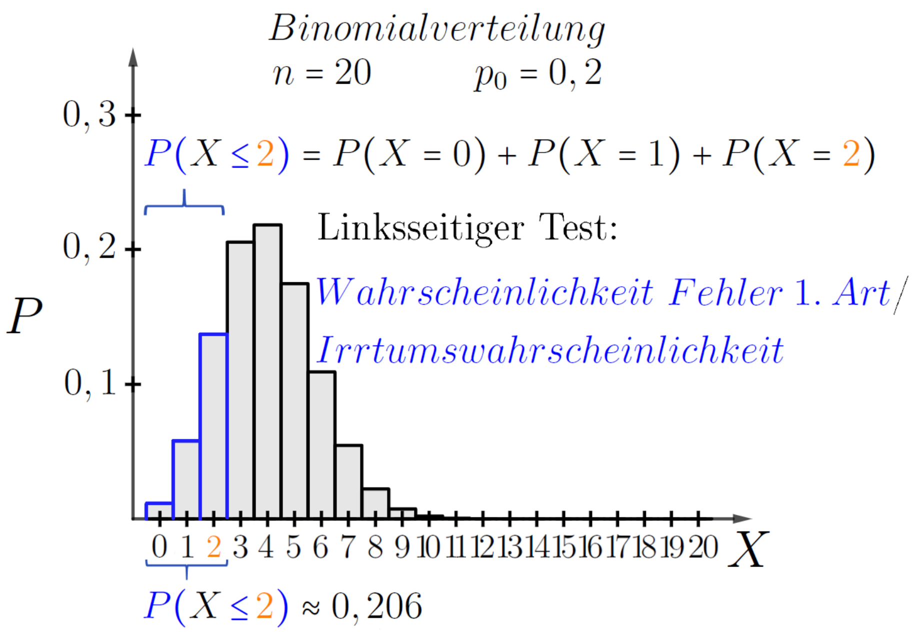


Beispiel. Um die stark gestiegene Nachfrage zu bedienen, investiert die Beerpong AG in eine weitere Produktionsmaschine zur Herstellung von Spielbällen. Nachdem die neue Produktionsmaschine in Betrieb ist, bemängelt ein Mitarbeiter die hohe Quote produzierter Bälle, die einen Defekt aufweisen. Seiner Meinung nach „produziert die neu angeschaffte Produktionsmaschine einen Ausschuss von mindestens 20%". Die Geschäftsleitung ordnet zur Überprüfung eine Entnahme von 20 Bällen aus der Produktion an und legt fest, wenn weniger als 3 Bälle defekt sind, so wird die Aussage des Mitarbeiters verworfen und kein Schadenersatz vom Hersteller eingefordert. Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Überprüfung?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens") mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit" $p_0 = 0,2$ und einem Stichprobenumfang $n = 20$ dar:
$H_0 : p \geq 0,2$
$H_1 : p < 0,2$
Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0:
$A = \{3, 4, ..., 19, 20\}$ und
$\overline{A} = \{0, 1, 2\}$

Für den kritischen Wert $k = 2$ ist die Irrtumswahrscheinlichkeit/Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art:

$P(X \leq 2) \approx 0,206$



3.7.2 Signifikanzniveau

Bei der Durchführung eines Hypothesentests ist man sehr daran interessiert die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit gering zu halten. Dabei soll aber der Test aussagekräftig/signifikant sein. Das Signifikanzniveau α eines Hypothesentests ist GLEICH der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/Irrtumswahrscheinlichkeit und berechnet sich dementsprechend GLEICH:

$$\text{Rechtsseitiger Test: } \alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$
$$\text{Linksseitiger Test: } \alpha = P(\text{Fehler 1. Art}) = P(X \leq k)$$

In der Wissenschaft wird in der Regel bei den meisten Hypothesentests, je nach Größe der Stichprobe (n), ein Signifikanzniveau von $\alpha = 10\%$ $(0,1)$, $\alpha = 5\%$ $(0,05)$ oder $\alpha = 1\%$ $(0,01)$ verwendet. Auf diesem Niveau sind die Ergebnisse der Tests „aussagekräftig".

Daher ist oft eine Aufgabenstellung, den Annahme- und Ablehnungsbereich eines Hypothesentests so zu wählen, dass ein bestimmtes Signifikanzniveau (z.B. $\alpha = 5\%$) erfüllt ist. Es geht darum, den kritischen Wert k (der den Ablehnungsbereich vom Annahmebereich „trennt") so zu wählen, dass das vorher festgelegte Signifikanzniveau erfüllt ist. Da das Signifikanzniveau α sich durch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art/ Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, wird damit folgendermaßen das gesuchte k herausgefunden/berechnet:

$$\text{Rechtsseitiger Test: } 1 - P(X \leq k-1) \leq \alpha \qquad | + P(X \leq k-1) \quad | - \alpha$$
$$1 - \alpha \leq P(X \leq k-1)$$
$$\Rightarrow P(X \leq k-1) \geq 1 - \alpha$$
$$\text{Linksseitiger Test: } P(X \leq k) \leq \alpha$$

Beim rechtsseitigen Test wählt man „$\geq 1 - \alpha$" und beim linksseitigen „$\leq \alpha$" deshalb, da der kritische Wert k nur ganze Werte annehmen kann (Nur ganze Zahlen, NICHT „Kommazahlen"). Beim rechtsseitigen Test sucht man also die **kleinstmögliche ganze Zahl** im Ablehnungsbereich $\overline{A}$ als kritischen Wert k, für die die Ungleichung erfüllt ist. Beim linksseitigen Test sucht man andererseits die **größtmögliche ganze Zahl** im Ablehnungsbereich $\overline{A}$ als kritischen Wert k, für die die Ungleichung erfüllt ist.

Beispiel. Ein YouTuber hatte bisher auf seinem Channel eine Like/Dislike-Quote von 3/1 (75%/25%). Für sein neuestes Video ist er eine Kooperation mit einem Werbepartner eingegangen, der nur dann bezahlt, wenn im neuen Video mindestens 75% der Bewertungen „Likes" sind. Da das Video eine längere Zeit online bleiben soll, der YouTuber jedoch zeitnah bezahlt werden möchte, treffen beide Parteien die Vereinbarung, dass ein Hypothesentest der Hypothese „Im neuen Video sind mindestens 75% der Bewertungen Likes" darüber entscheidet, ob der Werbepartner zu einer Zahlung verpflichtet ist oder nicht. Für die Durchführung des Tests mit einem vereinbarten Signifikanzniveau von 5% werden die ersten 50 Bewertungen des Videos nach Veröffentlichung betrachtet. Wie lautet die Entscheidungsregel für die optionale Zahlungsverpflichtung?

Diese Überprüfung stellt einen linksseitigen Hypothesentest (Keyword: „mindestens") mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit" $p_0 = 0,75$, einem Stichprobenumfang $n = 50$ und

einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ dar:
$H_0 : p \geq 0,75$
$H_1 : p < 0,75$
Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0:

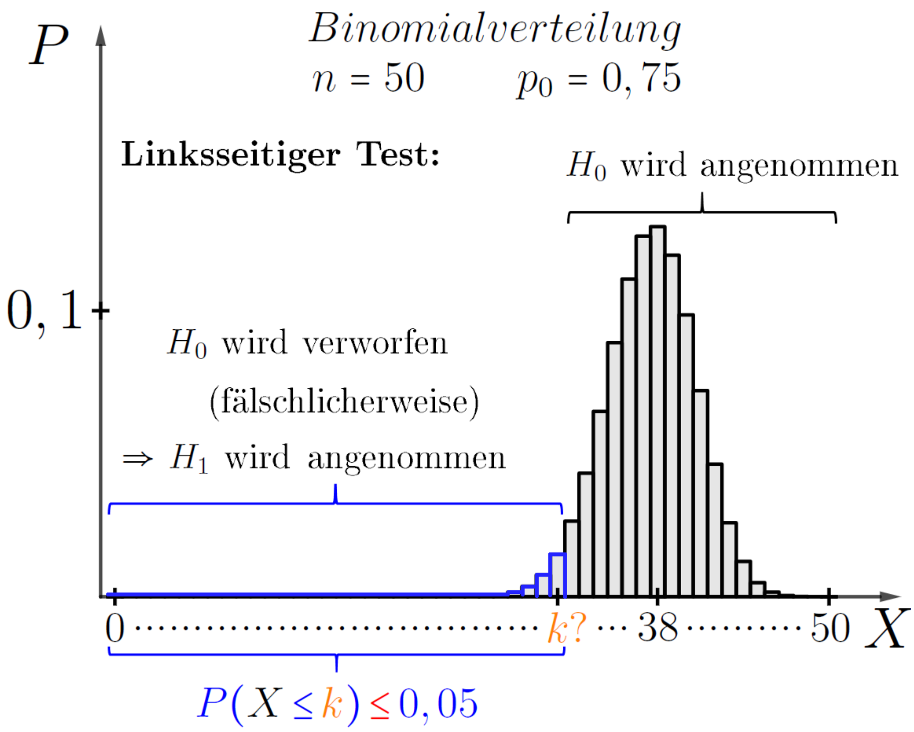
Die Frage ist, für welchen kritischen Wert k gilt: $P(X \leq k) \leq 0,05$?

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,75 = 37,5$. Beim linksseitigen Test **muss** k **kleiner sein** als der Erwartungswert (k liegt links vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf" oder auch „Binomial CD" die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ für die „möglichen k's" berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge $n = 50$ der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,75$ und für X nacheinander die ersten zehn Zahlen **kleiner als** $E(X)$ ein („mögliche k's", in dem Fall $X = 37, 36, ..., 28, 27$). Nun schaut ihr bei welchem X $P(X \leq k) \leq 0,05$ ist. Dieses X ist der gesuchte kritische Wert k. Falls $P(X \leq k)$ für alle eingegebenen X-Werte noch größer als $0,05$ ist, so müsst ihr so lange immer weitere, kleinere Werte für X eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis $P(X \leq k) \leq 0,05$ ist.

Da $P(X \leq 32) = 0,0551 > 0,05$ und $P(X \leq 31) = 0,0287 \leq 0,05$ ist der gesuchte kritische Wert $k = 31$ und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:
$A = \{32, 33, ..., 49, 50\}$ und
$\overline{A} = \{0, 1, ..., 30, 31\}$

Antwort: „Sind bei den 50 Bewertungen 32 oder mehr Likes dabei, so muss der Werbepartner den YouTuber ausbezahlen, andernfalls ist der Werbepartner zu keiner Zahlung verpflichtet."

Hinweis: Habt ihr einen grafikfähigen Taschenrechner zur Verfügung, lässt sich die Liste von „möglichen k's" und ihre jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ direkt für alle X-Werte erstellen, indem ihr die Anwendung „binomcdf" oder auch „Binomial CD" als eine Funktion mit der Variable x, $n = 50$ und $p = 0,75$ in eurem Taschenrechner definiert. Anschließend könnt ihr euch die Wertetabelle dieser Funktion für $X = 0, 1, ..., 49, 50$ ausgeben lassen und direkt schauen, für welchen kritischen Wert k $P(X \leq k) \leq 0,05$ gilt.



Beispiel. „Mehr als 30% meiner Follower schauen sich täglich die Stories auf meinem Instagram-Account an" behauptet eine bekannte Influencerin gegenüber einer Werbeagentur, um ihre Preisforderungen zu rechtfertigen. Die Werbeagentur geht eher davon aus, dass „höchstens 30% ihrer Follower sich die Stories täglich anschauen" und ordnet zur Überprüfung einen Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 10% an, in dem 40 im Vorhinein willkürlich ausgewählte Follower beobachtet werden, ob sie sich die nächste Storie der Influencerin anschauen werden, oder nicht. Wie lautet die Entscheidungsregel, wer am Ende recht hat?

Diese Überprüfung stellt einen rechtsseitigen Hypothesentest (Keyword: „mehr als", „höchstens") mit „Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit" $p_0 = 0,3$, einem Stichprobenumfang $n = 40$ und einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$ dar:
$H_0 : p \leq 0,3$
$H_1 : p > 0,3$
Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese H_0:

Die Frage ist, für welchen kritischen Wert k gilt: $P(X \leq k - 1) \geq 1 - 0,1 = 0,9$?

Dafür berechnet man zunächst den Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 40 \cdot 0,3 = 12$. Beim rechtsseitigen Test **muss** k **größer sein** als der Erwartungswert (k liegt rechts vom Erwartungswert). Der Taschenrechner kann über die Funktion „binomcdf" die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k - 1)$ für die „möglichen k's" berechnen. Wenn ihr diese Funktion aufgerufen habt, gebt ihr manuell die Länge $n = 40$ der Stichprobe, die Treffer-/Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,3$ und für X nacheinander die ersten zehn Zahlen **größer als** $E(X)$ ein („mögliche k's", in dem Fall $X = 13, 14, ..., 22, 23$). Nun schaut ihr bei welchem X $P(X \leq k - 1) \geq 0,9$ ist. Dieses $X + \mathbf{1}$ (**!!!**) ist der gesuchte kritische Wert k. Falls $P(X \leq k - 1)$ für alle eingegebenen X-Werte noch kleiner als $0,9$ ist, so müsst ihr so lange immer weitere, größere Werte für X eingeben und die Wahrscheinlichkeit berechnen, bis $P(X \leq k - 1) \geq 0,9$ ist.

Da $P(X \leq 15) = 0,8848 < 0,9$ und $P(X \leq 16) = 0,9366 \geq 0,9$ ist der gesuchte kritische Wert $k = 16 + \mathbf{1} = 17$ (da $k - 1 = 16$) und damit lautet die Entscheidungsregel also der Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese:
$A = \{0, 1, ..., 15, 16\}$ und
$\overline{A} = \{17, 18, ..., 39, 40\}$

Antwort: „Sind bei den 40 Followern 16 oder weniger dabei, die die nächste Storie anschauen, so hatte die Werbeagentur recht, andernfalls behält die Influencerin recht und hat eine fundierte Begründung für ihre Preisforderungen."

Hinweis: Mit einem grafikfähigen Taschenrechner könnt ihr wie im vorherigen Beispiel beschrieben verfahren, bloß die Werte für n und p müsst ihr anpassen. Und achtet auf das $X + \mathbf{1}$ um k zu bestimmen!